Pariksha Saathi — मात्रात्मक अभियोग्यता नोट्स

26 टॉपिक • 63 पाठ • अपडेट 28 अक्टूबर 2026

ये नोट्स एक AI सहायक ने लिखे हैं - वही पाठ जो Pariksha Saathi ऐप में हैं। किसी विषय-विशेषज्ञ ने इनकी समीक्षा नहीं की है। ज़रूरी तथ्य आधिकारिक स्रोत या मानक पाठ्यपुस्तक से मिला लें। कोई गलती दिखे तो बताएँ: parikshasaathi.com/contact/

इन परीक्षाओं के पाठ्यक्रम में शामिल मात्रात्मक अभियोग्यता के टॉपिक: SSC CGL, IBPS PO, SSC MTS, SSC CHSL, SBI PO, SBI Clerk, IBPS Clerk, RRB NTPC, RRB Group D, RRB ALP, SSC GD Constable, Agniveer (Army GD), UP Police Constable, Bihar Police Constable, MP Police Constable, Rajasthan Police Constable, UPPSC Prelims, MPPSC Prelims, UPSSSC PET, BSSC Inter Level, Rajasthan Patwari, Haryana CET (Group C), DSSSB TGT। हर टॉपिक के अंत में उसके मुफ़्त अभ्यास प्रश्नों का लिंक है; पूरे मॉक टेस्ट Pariksha Saathi ऐप और वेबसाइट पर मुफ़्त हैं।

विषय-सूची

औसत
डेटा इंटरप्रिटेशन
नंबर सिस्टम
प्रतिशत
अनुपात और समानुपात
साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज
समय और कार्य
चाल, समय और दूरी
बीजगणित — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग
बैंकर्स डिस्काउंट और सत्य बट्टा (True Discount) के प्रश्न हल सहित
नाव और धारा (बोट एंड स्ट्रीम)
चेन रूल (Chain Rule)
ज्यामिति: वृत्त — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग
ज्यामिति: रेखाएं, कोण और त्रिभुज
ऊंचाई और दूरी (Height and Distance)
ल.स. और म.स. (LCM और HCF)
क्षेत्रमिति (क्षेत्रफल और परिमाप)
क्षेत्रमिति: 3D — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग
मिश्रण और मिश्रण-क्रिया (एलिगेशन)
साझेदारी (पार्टनरशिप)
क्रमचय और संचय (परम्यूटेशन और कॉम्बिनेशन) के प्रश्न हल सहित
उम्र पर आधारित
लाभ और हानि
सरलीकरण (BODMAS)
स्टॉक्स और शेयर्स (Stocks and Shares)
त्रिकोणमितीय अनुपात और सर्वसमिकाएं
दोहराव पत्रक

औसत

औसत — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

समांतर औसत अवलोकनों के योग को उनकी संख्या से विभाजित करने के बराबर होता है, तो मूल योग हमेशा औसत × संख्या के रूप में वापस पाया जा सकता है। भारित औसत हर मान को उसके भार से गुणा करके योग करने और कुल भार से विभाजित करने से मिलता है। समूहों को उनके योग और संख्या जोड़कर मिलाएं, समूह के आकार की परवाह किए बिना समूह औसतों को औसत करके नहीं। जब अवलोकन जोड़े जाएं, हटाए जाएं, या बदले जाएं, नया औसत निकालने से पहले योग और संख्या को अलग-अलग समायोजित करें। एक अनुपस्थित मान आवश्यक योग घटा ज्ञात मानों का योग होता है, और एक गलत प्रविष्टि को सुधारना योग को सही मान घटा दर्ज किए गए मान से बदल देता है।

एक बहुत आम प्रश्न प्रकार समूह के एक सदस्य को नए सदस्य से बदलता है और बताता है कि औसत कैसे बदलता है: यदि किसी व्यक्ति को बदलने से n लोगों का औसत d से बदलता है (ऊपर या नीचे), तो योग n×d से बदलता है, और चूंकि केवल एक व्यक्ति बदला गया, नए व्यक्ति का मान बस पुराने व्यक्ति के मान ± (n×d) होता है - पूरे योग को फिर से शुरू से निकालने की ज़रूरत नहीं।

क्रमागत पूर्णांकों (या किसी समान-दूरी वाले अनुक्रम) के समूह के लिए, औसत हमेशा ठीक पहले और अंतिम पद का मध्यबिंदु होता है: औसत = (पहला + अंतिम)/2। जब संख्या विषम हो, तो यह औसत अनुक्रम का ठीक मध्य पद भी होता है - "इन क्रमागत संख्याओं का औसत ज्ञात करें" का उत्तर बिना कुछ जोड़े तेज़ी से देने का तरीका।

उदाहरण

- 11, 15, 18, 22, 29 का समांतर औसत ज्ञात करें। हल: योग 95 है और 5 अवलोकन हैं। औसत = 95/5 = 19।
- 9 मानों का औसत 26 है। एक और मान जोड़ने पर औसत 27 हो जाता है। जोड़ा गया मान ज्ञात करें। हल: पुराना योग 234 है। नया योग (9 + 1) × 27 = 270 है। घटाने पर जोड़ा गया मान 36 मिलता है।
- चार समान-भार वाली परीक्षाओं में से हर एक का अधिकतम अंक 100 है। पहली तीन में अंक 63, 67 और 73 हैं। 71 का औसत बनाने के लिए चौथा अंक क्या होना चाहिए? हल: आवश्यक योग 4 × 71 = 284 है; पहले तीन अंकों का योग 203 है। तो चौथा अंक 81 होना चाहिए।

- 8 लोगों का औसत वज़न 2.5 kg बढ़ जाता है जब एक नया व्यक्ति 65 kg वज़न वाले व्यक्ति की जगह लेता है। नए व्यक्ति का वज़न ज्ञात करें। हल: कुल वज़न 8 × 2.5 = 20 kg बढ़ता है (क्योंकि संख्या 8 पर स्थिर रहती है, और औसत सभी 8 के लिए 2.5 बढ़ा)। नए व्यक्ति का वज़न = 65 + 20 = 85 kg।
- 5 से शुरू होने वाले 11 क्रमागत पूर्णांकों का औसत ज्ञात करें। हल: अनुक्रम 5 से 15 तक चलता है। औसत = (पहला + अंतिम)/2 = (5+15)/2 = 10 - जो 11 संख्याओं का ठीक 6वां (मध्य) पद भी है, जैसा विषम संख्या के लिए अपेक्षित है।
- 30 छात्रों की एक कक्षा की औसत आयु 15 वर्ष है। यदि शिक्षक की आयु (40 वर्ष) शामिल की जाए, तो नया औसत ज्ञात करें। हल: पुराना योग = 30 × 15 = 450। नया योग = 450 + 40 = 490, 31 लोगों पर। नया औसत = 490/31 ≈ 15.8 वर्ष।
- एक कक्षा के दो खंडों में क्रमशः 20 और 30 छात्र हैं जिनके औसत अंक 60 और 70 हैं। संयुक्त औसत ज्ञात करें। हल: सीधे दोनों औसतों को नहीं, योग मिलाएं: योग = 20×60 + 30×70 = 1200+2100 = 3300, 50 छात्रों पर, जो संयुक्त औसत 3300/50 = 66 देता है - सरल मध्यबिंदु 65 नहीं, क्योंकि बड़ा खंड औसत को अपनी ओर खींचता है।

> **त्वरित दोहराव:** औसत = योग/संख्या; भारित औसत = Σ(मान × भार)/Σभार; मिलाने, जोड़ने, हटाने या बदलने से पहले योग उपयोग करें। एक सदस्य बदलना: नया मान = पुराना मान ± (संख्या × औसत में बदलाव)। क्रमागत/समान-दूरी संख्याएं: औसत = (पहला+अंतिम)/2, जो विषम संख्या होने पर मध्य पद के बराबर है। समूह मिलाना: योग और संख्या जोड़ें, जब तक समूह बराबर आकार के न हों सीधे औसतों को औसत न करें।

औसत के प्रश्न हल सहित

औसत के प्रश्न ज़्यादातर सूत्र को उल्टा इस्तेमाल करने के बारे में होते हैं — औसत से वापस योग तक पहुंचना ही असली कौशल है जो परखा जाता है, न कि सीधा औसत निकालना। इस पेज में मुख्य सूत्र, क्रमागत संख्याओं और गोल आधार के पास की संख्याओं के लिए तेज़ शॉर्टकट, समूहों के औसत को सही ढंग से मिलाना, और कई हल किए गए उदाहरण दिए गए हैं। औसत = सभी मानों का योग / मानों की संख्या। इसे उल्टा करें तो: योग = औसत × मानों की संख्या — यह उल्टा सूत्र ज़्यादातर औसत के सवालों की कुंजी है, जो आमतौर पर औसत देकर योग के बारे में पूछते हैं (या इसके उलट)। जब कोई नया मान समूह में जुड़ता है, तो पहले नया कुल योग निकालें (पुराना योग + नया मान), फिर नई संख्या से भाग दें — पुराने औसत को सीधे नए मान के साथ कभी औसत न करें। उपयोगी शॉर्टकट: यदि n मौजूदा मानों में एक नया मान जोड़ने से औसत A से बदलकर A′ हो जाता है, तो नया मान = A′ + n(A′ − A) होता है। क्रमागत संख्याओं (या किसी समान-अंतराल क्रम) के समूह के लिए, औसत मध्य मान के बराबर होता है (विषम संख्या में पद होने पर) या दो मध्य मानों का औसत (सम संख्या में पद होने पर) — यानी (पहला + अंतिम) / 2। यह हर पद जोड़ने से तेज़ है। दो समूहों को मिलाना: संयुक्त औसत समूह के आकार के अनुसार भारित औसत होता है, ($योग_1$ + $योग_2$) / ($संख्या_1$ + $संख्या_2$) — दोनों समूह औसतों का सीधा औसत नहीं, जब तक दोनों समूह बराबर आकार के न हों। तेज़ मानसिक गणना के लिए विचलन विधि: संख्याओं के पास कोई सुविधाजनक गोल आधार चुनें, हर संख्या का उस आधार से विचलन (धन या ऋण) निकालें, इन छोटे विचलनों का औसत लें, फिर उसे आधार में वापस जोड़ दें। जाँच: किसी समूह का औसत उसके न्यूनतम और अधिकतम मान के बीच ही होना चाहिए। यदि निकाला गया औसत इस दायरे से बाहर है, तो कहीं गणना में गलती है।

उदाहरण

- 12, 15, 18, 21, और 24 का औसत ज्ञात करें। हल: योग = 12 + 15 + 18 + 21 + 24 = 90 औसत = योग / संख्या = 90 / 5 = 18 उत्तर: 18
- 5 संख्याओं का औसत 27 है। यदि एक संख्या हटा दी जाए, तो शेष 4 संख्याओं का औसत 25 हो जाता है। हटाई गई संख्या ज्ञात करें। हल: सभी 5 संख्याओं का योग = 5 × 27 = 135 शेष 4 संख्याओं का योग = 4 × 25 = 100 हटाई गई संख्या = 135 − 100 = 35 उत्तर: 35
- एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों का औसत वज़न 42 kg है। शिक्षक का वज़न शामिल करने पर, औसत 1 kg बढ़ जाता है। शिक्षक का वज़न ज्ञात करें। हल: पुराना योग (30 विद्यार्थी) = 30 × 42 = 1,260 kg नया औसत (31 व्यक्ति) = 42 + 1 = 43 kg, तो नया योग = 31 × 43 = 1,333 kg शिक्षक का वज़न = नया योग − पुराना योग = 1,333 − 1,260 = 73 kg उत्तर: 73 kg
- 40 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, औसत अंक 60 हैं। कक्षा में 20 लड़के और 20 लड़कियां हैं। यदि लड़कों के औसत अंक 50 हैं, तो लड़कियों के औसत अंक ज्ञात करें। हल: कुल अंक (40 विद्यार्थी) = 40 × 60 = 2,400 लड़कों के कुल अंक (20 लड़के) = 20 × 50 = 1,000 लड़कियों के कुल अंक = 2,400 − 1,000 = 1,400, तो लड़कियों का औसत = 1,400 / 20 = 70 उत्तर: 70
- 15 से 25 तक (दोनों शामिल) सभी प्राकृतिक संख्याओं का औसत ज्ञात करें। हल: यह एक क्रमागत (समान-अंतराल) क्रम है, तो औसत = (पहला + अंतिम) / 2। = (15 + 25) / 2 = 20 उत्तर: 20
- सेक्शन A में 20 विद्यार्थी हैं जिनका औसत स्कोर 60 है, और सेक्शन B में 30 विद्यार्थी हैं जिनका औसत स्कोर 70 है। दोनों सेक्शनों का संयुक्त औसत ज्ञात करें। हल: सेक्शनों का आकार अलग है, इसलिए संयुक्त औसत सीधा औसत (60+70)/2 = 65 नहीं है — इसे विद्यार्थियों की संख्या के अनुसार भारित करना होगा। कुल अंक = (20 × 60) + (30 × 70) = 1,200 + 2,100 = 3,300 कुल विद्यार्थी = 20 + 30 = 50 संयुक्त औसत = 3,300 / 50 = 66 उत्तर: 66
- विचलन विधि का उपयोग करते हुए 198, 203, 207, 196, और 201 का औसत ज्ञात करें। हल: आधार = 200 चुनें। 200 से विचलन: −2, +3, +7, −4, +1। विचलनों का योग = −2 + 3 + 7 − 4 + 1 = 5। औसत विचलन = 5 / 5 = 1। औसत = आधार + औसत विचलन = 200 + 1 = 201। सीधे जोड़कर जांच करें: 198+203+207+196+201 = 1,005; 1,005/5 = 201। मेल खाता है। उत्तर: 201
- Practice: 8, 12, 16, 20, और 24 का औसत ज्ञात करें। (उत्तर: 16। योग = 80; 80/5।)
- Practice: एक कमरे में 6 लोगों की औसत उम्र 30 वर्ष है। एक सातवां व्यक्ति आता है और औसत 32 वर्ष हो जाता है। सातवें व्यक्ति की उम्र ज्ञात करें। (उत्तर: 44 वर्ष। नया मान = A′ + n(A′ − A) = 32 + 6(32 − 30)।)
- Practice: एक क्रिकेटर का 10 पारियों में औसत 40 रन है। अपना औसत 42 तक बढ़ाने के लिए उसे 11वीं पारी में कितने रन बनाने होंगे? (उत्तर: 62 रन। आवश्यक नया योग = 11×42 = 462; पुराना योग = 10×40 = 400; अंतर = 62।)

- Practice: 21 से 29 तक (दोनों शामिल) सभी पूर्णांकों का औसत ज्ञात करें। (उत्तर: 25। (पहला + अंतिम)/2 = (21+29)/2।)
- Practice: सेक्शन X में 15 विद्यार्थी हैं जिनका औसत स्कोर 80 है, और सेक्शन Y में 25 विद्यार्थी हैं जिनका औसत स्कोर 68 है। संयुक्त औसत ज्ञात करें। (उत्तर: 72.5। कुल अंक = 15×80 + 25×68 = 2,900; कुल विद्यार्थी = 40; 2,900/40।)
- Practice: विचलन विधि (आधार 500) का उपयोग करते हुए 505, 498, 510, 497, और 500 का औसत ज्ञात करें। (उत्तर: 502। विचलन: +5, −2, +10, −3, 0; योग = 10; औसत विचलन = 2; 500 + 2।)
- Practice: 35 विद्यार्थियों की कक्षा का औसत अंक 72 है। पहले 20 विद्यार्थियों का औसत 75 है। शेष 15 विद्यार्थियों का औसत ज्ञात करें। (उत्तर: 68। कुल = 35×72 = 2,520; पहले 20 का योग = 20×75 = 1,500; शेष का योग = 1,020; 1,020/15।)

> **त्वरित दोहराव:** औसत = सभी मानों का योग / मानों की संख्या।; इसे उल्टा करें तो: योग = औसत × मानों की संख्या — यह उल्टा सूत्र ज़्यादातर औसत के सवालों की कुंजी है, जो आमतौर पर औसत देकर योग के बारे में पूछते हैं (या इसके उलट)।; जब कोई नया मान समूह में जुड़ता है, तो पहले नया कुल योग निकालें (पुराना योग + नया मान), फिर नई संख्या से भाग दें — पुराने औसत को सीधे नए मान के साथ कभी औसत न करें।; उपयोगी शॉर्टकट: यदि n मौजूदा मानों में एक नया मान जोड़ने से औसत A से बदलकर A′ हो जाता है, तो नया मान = A′ + n(A′ − A) होता है।; क्रमागत संख्याओं (या किसी समान-अंतराल क्रम) के समूह के लिए, औसत मध्य मान के बराबर होता है (विषम संख्या में पद होने पर) या दो मध्य मानों का औसत (सम संख्या में पद होने पर) — यानी (पहला + अंतिम) / 2। यह हर पद जोड़ने से तेज़ है।; दो समूहों को मिलाना: संयुक्त औसत समूह के आकार के अनुसार भारित औसत होता है, (योग$_1$ + योग$_2$) / (संख्या$_1$ + संख्या$_2$) — दोनों समूह औसतों का सीधा औसत नहीं, जब तक दोनों समूह बराबर आकार के न हों।; तेज़ मानसिक गणना के लिए विचलन विधि: संख्याओं के पास कोई सुविधाजनक गोल आधार चुनें, हर संख्या का उस आधार से विचलन (धन या ऋण) निकालें, इन छोटे विचलनों का औसत लें, फिर उसे आधार में वापस जोड़ दें।; जाँच: किसी समूह का औसत उसके न्यूनतम और अधिकतम मान के बीच ही होना चाहिए। यदि निकाला गया औसत इस दायरे से बाहर है, तो कहीं गणना में गलती है।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/average-applications/

डेटा इंटरप्रिटेशन

डेटा इंटरप्रिटेशन — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

गणना करने से पहले बताए गए लेबल, इकाइयां, अवधि और श्रेणी परिभाषाएं पढ़ें, और केवल प्रश्न में दिए गए मानों का उपयोग करें। योग संगत मात्राएं जोड़ते हैं, अंतर उन्हें घटाते हैं, अनुपात उन्हें बताए गए क्रम में तुलना करते हैं और प्रतिशत निर्दिष्ट संदर्भ आधार से भाग देते हैं। एक संयुक्त औसत कुल मात्रा को कुल संख्या से भाग देकर, या आवृत्तियां अलग होने पर भारित मानों से मिलता है। एक पाई सेक्टर कुल का कोण/360 दर्शाता है, और एक सामान्य बार चार्ट की लेबल की गई ऊंचाइयां बताए गए मानों को दर्शाती हैं। हिस्टोग्राम के लिए पहचानें कि ऊंचाई आवृत्ति है या आवृत्ति घनत्व, अंतराल सीमाओं का एक समान उपयोग करें, और आवृत्ति बहुभुज के लिए दिए गए मध्यबिंदु-आवृत्ति निर्देशांक उपयोग करें और समूहीकृत डेटा के लिए मध्यबिंदु-आधारित माध्य को अनुमान मानें।

विशेष रूप से पाई चार्ट के लिए, किसी सेक्टर के कोण को वास्तविक मान में बदलना एक सीधा अनुपात है: मान = (सेक्टर कोण/360°) × कुल मान - पूरे पाई का 360° हमेशा कुल योग दर्शाता है, तो कोई भी टुकड़ा कुल का वही अंश है।

जब किसी तालिका से दो श्रेणियों की तुलना करें, तो तुलना को ठीक वैसे व्यक्त करें जैसे पूछा गया है: एक अनुपात दोनों मात्राओं को सरलतम रूप में साथ रखता है (जैसे, 40:25 सरल होकर 8:5 बनता है), जबकि पुराने मान से नए मान तक प्रतिशत बदलाव (नया − पुराना)/पुराना × 100 है - हमेशा पुराने (शुरुआती) मान से भाग देते हुए, नए से नहीं, जब तक प्रश्न स्पष्ट रूप से उल्टा न पूछे।

उदाहरण

- नोटबुक बिक्री की तालिका: दुकान A = 21, दुकान B = 32, दुकान C = 43। कुल बिकी नोटबुक ज्ञात करें। हल: तीनों प्रविष्टियां जोड़ें: 21 + 32 + 43 = 96 नोटबुक।
- एक तालिका दैनिक डिलीवरी दिखाती है: सोमवार 5, मंगलवार 8, बुधवार 14। इन तीन दिनों में प्रतिदिन औसत डिलीवरी ज्ञात करें। हल: कुल डिलीवरी = 3 दिनों में 27। औसत 27/3 = 9 है।
- एक तालिका तीन दुकानों द्वारा बेची गई वस्तुएं सूचीबद्ध करती है: A = 36, B = अज्ञात, C = 28। कुल 111 है। B की बिक्री ज्ञात करें। हल: ज्ञात प्रविष्टियों का योग 36 + 28 = 64 है। कुल से घटाएं: B = 111 − 64 = 47।
- एक पाई चार्ट एक कंपनी के ₹50,000 के कुल मासिक खर्च दिखाता है, जिसमें "Transport" सेक्टर 360° वृत्त का 72° घेरता है। Transport पर खर्च की गई राशि ज्ञात करें। हल: Transport = (72/360) × 50000 = 0.2 × 50000 = ₹10,000।
- दुकान A ने एक सप्ताह में 40 इकाइयां और दुकान B ने 25 इकाइयां बेचीं। A की बिक्री का B की बिक्री से अनुपात सरलतम रूप में ज्ञात करें। हल: अनुपात = 40:25। दोनों को उनके HCF (5) से भाग देने पर 8:5 मिलता है।
- एक उत्पाद की बिक्री दो महीनों के बीच 250 इकाई से बढ़कर 300 इकाई हो गई। प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें। हल: प्रतिशत बदलाव = (300−250)/250 × 100 = 50/250 × 100 = 20% - ध्यान दें पुराना मान (250) आधार है, नया मान (300) नहीं।

त्वरित दोहराव: योग जोड़ते हैं, अंतर घटाते हैं, अनुपात बताए गए क्रम में तुलना करते हैं, प्रतिशत निर्दिष्ट आधार से भाग देते हैं। संयुक्त औसत = कुल मात्रा/कुल संख्या (आवृत्तियां अलग होने पर भारित)। पाई सेक्टर मान = (सेक्टर कोण/360°) × कुल। अनुपात: HCF से सरल करें। प्रतिशत बदलाव = (नया − पुराना)/पुराना × 100 - जब तक अन्यथा न कहा जाए, हमेशा पुराने मान से भाग दें।

डेटा इंटरप्रिटेशन के प्रश्न हल सहित

डेटा इंटरप्रिटेशन ज़्यादातर सामान्य अंकगणित है जो एक तालिका या चार्ट का भेष बदले हुए है — डेटा को सही तरीके से पढ़ना ही असली नया कौशल है; गणनाएं खुद वही प्रतिशत, अनुपात और औसत हैं जो आप पहले से जानते हैं। इस पेज में यह मुख्य विचार, दो-श्रेणी (बिक्री-और-लागत) वाली तालिकाएं, कुल से गायब मान निकालना, और श्रेणियों में भारित औसत शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। गणना करने से पहले हमेशा तालिका या चार्ट के साथ दी गई इकाइयों और किसी भी पैमाने की जांच करें ("आंकड़े हज़ारों में," "बिक्री ₹ लाख में") — पैमाना गलत पढ़ना इस विषय की सबसे आम लापरवाही वाली गलती है। "कितना प्रतिशत ज़्यादा/कम" वाले प्रश्नों के लिए, प्रतिशत परिवर्तन हमेशा मूल मान (जिससे तुलना की जा रही है) के सापेक्ष निकालें, नए मान के सापेक्ष नहीं — प्रतिशत वाला वही तुलना-आधार नियम, बस एक तालिका के अंदर। कई-चरणों वाले प्रश्नों के लिए, एक साथ कई मानों को दिमाग में मिलाने की कोशिश करने के बजाय, पहले हर ज़रूरी मान अलग-अलग निकालें और लिख लें। तालिका के डेटा से निकाला गया अनुपात या औसत बिल्कुल अलग से अनुपात/औसत विषयों की तरह काम करता है — तालिका बस कच्चे आंकड़े देती है। जब एक तालिका एक ही श्रेणियों के लिए दो जुड़ी हुई श्रृंखलाएं दिखाए (जैसे बिक्री और लागत, या आय और व्यय), तो "लाभ" या "अंतर" वाला प्रश्न हर पंक्ति में घटाव मांगता है — दोनों श्रृंखलाओं को सीधे औसत या किसी और तरीके से न मिलाएं। यदि किसी तालिका में कुल योग दिया हो और एक प्रविष्टि खाली हो, तो ज्ञात प्रविष्टियों का योग दिए गए कुल से घटाकर गायब मान निकालें। उत्तर देने के बाद, डेटा की वास्तविक दिशा से उसकी तार्किकता जांचें — यदि तालिका में हर वर्ष बिक्री बढ़ रही है, तो निकाला गया "कमी" वाला उत्तर आपको वापस जाकर एक चरण दोबारा जांचने के लिए सचेत करे।

उदाहरण

- एक कंपनी की वार्षिक बिक्री (₹ लाख में) थी: 2020 — 50, 2021 — 60, 2022 — 75, 2023 — 90, 2024 — 120। 2020 से 2021 तक बिक्री में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें। हल: वृद्धि = 60 − 50 = 10। प्रतिशत वृद्धि = (10/50) × 100 = 20%। उत्तर: 20%
- उसी बिक्री तालिका का उपयोग करते हुए (2020 — 50, 2021 — 60, 2022 — 75, 2023 — 90, 2024 — 120, ₹ लाख में), पांच वर्षों में औसत वार्षिक बिक्री ज्ञात करें। हल: योग = 50 + 60 + 75 + 90 + 120 = 395। औसत = 395 / 5 = 79। उत्तर: ₹79 लाख
- उसी बिक्री तालिका का उपयोग करते हुए (2020 — 50, 2021 — 60, 2022 — 75, 2023 — 90, 2024 — 120, ₹ लाख में), किस वर्ष में पिछले वर्ष की तुलना में बिक्री में प्रतिशत वृद्धि सबसे अधिक थी? हल: 2020→2021: (10/50)×100 = 20%। 2021→2022: (15/60)×100 = 25%। 2022→2023: (15/75)×100 = 20%। 2023→2024: (30/90)×100 ≈ 33.3%। सबसे अधिक 2023→2024 है, तो 2024 में अपने पिछले वर्ष की तुलना में सबसे अधिक प्रतिशत वृद्धि थी। उत्तर: 2024
- उसी बिक्री तालिका का उपयोग करते हुए (2020 — 50, 2021 — 60, 2022 — 75, 2023 — 90, 2024 — 120, ₹ लाख में), 2022 की बिक्री का 2024 की बिक्री से अनुपात ज्ञात करें। हल: अनुपात = 75 : 120। दोनों पदों को उनके HCF, 15, से भाग देने पर: 75÷15 : 120÷15 = 5 : 8। उत्तर: 5 : 8
- एक कंपनी की बिक्री और लागत (₹ लाख में) थी: 2021 — बिक्री 60, लागत 45; 2022 — बिक्री 75, लागत 50। 2022 के लिए लाभ मार्जिन (बिक्री के प्रतिशत के रूप में लाभ) ज्ञात करें। हल: 2022 का लाभ = बिक्री − लागत = 75 − 50 = 25। लाभ मार्जिन = (लाभ / बिक्री) × 100 = (25 / 75) × 100 ≈ 33.3% उत्तर: ≈ 33.3%
- एक दुकान की जनवरी से मई तक की मासिक बिक्री (₹ हज़ार में) का कुल ₹310 था। जनवरी, फरवरी, अप्रैल और मई के आंकड़े क्रमशः 40, 55, 65 और 70 थे, और मार्च का आंकड़ा गायब है। मार्च की बिक्री ज्ञात करें। हल: ज्ञात चार महीनों का योग = 40 + 55 + 65 + 70 = 230। मार्च की बिक्री = कुल − ज्ञात योग = 310 − 230 = ₹80 हज़ार उत्तर: ₹80 हज़ार
- एक दुकान एक ही उत्पाद को 3 क्षेत्रों में बेचती है: क्षेत्र A ने 200 इकाइयां ₹50 प्रत्येक पर, क्षेत्र B ने 150 इकाइयां ₹60 प्रत्येक पर, और क्षेत्र C ने 100 इकाइयां ₹80 प्रत्येक पर बेचीं। तीनों क्षेत्रों को मिलाकर प्रति इकाई औसत विक्रय मूल्य ज्ञात करें। हल: इसके लिए भारित औसत (बिकी इकाइयों के अनुसार) चाहिए, तीन मूल्यों का सीधा औसत नहीं। कुल आय = (200×50) + (150×60) + (100×80) = 10,000 + 9,000 + 8,000 = 27,000। कुल इकाइयां = 200 + 150 + 100 = 450। प्रति इकाई औसत मूल्य = 27,000 / 450 = ₹60। उत्तर: ₹60 प्रति इकाई
- Practice: उसी बिक्री तालिका का उपयोग करते हुए (2020: 50, 2021: 60, 2022: 75, 2023: 90, 2024: 120, ₹ लाख में), 2022 से 2023 तक बिक्री में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें। (उत्तर: 20%)
- Practice: उसी बिक्री तालिका का उपयोग करते हुए, 2020, 2021 और 2022 की संयुक्त कुल बिक्री ज्ञात करें। (उत्तर: ₹185 लाख)
- Practice: उसी बिक्री तालिका का उपयोग करते हुए, 2020 की बिक्री का 2023 की बिक्री से अनुपात ज्ञात करें। (उत्तर: 5 : 9)
- Practice: एक कंपनी की 2023 की बिक्री और लागत क्रमशः ₹90 लाख और ₹65 लाख थी। लाभ मार्जिन (बिक्री के प्रतिशत के रूप में लाभ) ज्ञात करें। (उत्तर: ≈ 27.8%। लाभ = 25; (25/90) × 100।)
- Practice: एक 4-तिमाही तालिका का कुल ₹500 करोड़ है। Q1, Q2 और Q3 क्रमशः ₹100, ₹140 और ₹130 करोड़ थे। Q4 ज्ञात करें। (उत्तर: ₹130 करोड़। 500 − (100+140+130)।)
- Practice: एक दुकान 3 उत्पाद बेचती है: उत्पाद X — 50 इकाइयां ₹20 प्रत्येक; उत्पाद Y — 30 इकाइयां ₹40 प्रत्येक; उत्पाद Z — 20 इकाइयां ₹100 प्रत्येक। तीनों को मिलाकर प्रति इकाई औसत मूल्य ज्ञात करें। (उत्तर: ₹42। कुल आय = 1,000+1,200+2,000 = 4,200; कुल इकाइयां = 100।)
- Practice: मूल बिक्री तालिका (2020–2024: 50, 60, 75, 90, 120, कुल 395) का उपयोग करते हुए, 5 वर्षों के कुल में से 2024 का हिस्सा प्रतिशत में ज्ञात करें। (उत्तर: ≈ 30.4%। (120/395) × 100।)

त्वरित दोहराव: गणना करने से पहले हमेशा तालिका या चार्ट के साथ दी गई इकाइयों और किसी भी पैमाने की जांच करें ("आंकड़े हज़ारों में," "बिक्री ₹ लाख में") — पैमाना गलत पढ़ना इस विषय की सबसे आम लापरवाही वाली गलती है।; "कितना प्रतिशत ज़्यादा/कम" वाले प्रश्नों के लिए, प्रतिशत परिवर्तन हमेशा मूल मान (जिससे तुलना की जा रही है) के सापेक्ष निकालें, नए मान के सापेक्ष नहीं — प्रतिशत वाला वही तुलना-आधार नियम, बस एक तालिका के अंदर।; कई-चरणों वाले प्रश्नों के लिए, एक साथ कई मानों को दिमाग में मिलाने की कोशिश करने के बजाय, पहले हर ज़रूरी मान अलग-अलग निकालें और लिख लें।; तालिका के डेटा से निकाला गया अनुपात या औसत बिल्कुल अलग से अनुपात/औसत विषयों की तरह काम करता है — तालिका बस कच्चे आंकड़े देती है।; जब एक तालिका एक ही श्रेणियों के लिए दो जुड़ी हुई श्रृंखलाएं दिखाए (जैसे बिक्री और लागत, या आय और व्यय), तो "लाभ" या "अंतर" वाला प्रश्न हर पंक्ति में घटाव मांगता है — दोनों श्रृंखलाओं को सीधे औसत या किसी और तरीके से न मिलाएं।; यदि किसी तालिका में कुल योग दिया हो और एक प्रविष्टि खाली हो, तो ज्ञात प्रविष्टियों का योग दिए गए कुल से घटाकर गायब मान निकालें।; उत्तर देने के बाद, डेटा की वास्तविक दिशा से उसकी तार्किकता जांचें — यदि तालिका में हर वर्ष बिक्री बढ़ रही है, तो निकाला गया "कमी" वाला उत्तर आपको वापस जाकर एक चरण दोबारा जांचने के लिए सचेत करे।

पाई चार्ट (Pie Chart) के प्रश्न हल सहित

एक पाई चार्ट, Data Interpretation ही है जिसमें श्रेणियों को एक सामान्य तालिका के बजाय 360° के हिस्से के रूप में व्यक्त किया जाता है — नीचे का अंकगणित वही प्रतिशत वाला काम है, बस जब कोई प्रश्न सीधे प्रतिशत के बजाय डिग्री देता है तो एक अतिरिक्त रूपांतरण चरण जुड़ जाता है। इस पेज में यह रूपांतरण, अनुपात से श्रेणियों की तुलना, दो अलग चार्टों में प्रतिशत तुलना का जोखिम, और गायब श्रेणी ज्ञात करना शामिल है, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। हर पाई चार्ट 360° (एक पूर्ण वृत्त) और 100% तक जुड़ता है — हर श्रेणी का हिस्सा पूरे का एक प्रतिशत है, या समान रूप से 360° का एक भिन्न है। यदि किसी श्रेणी का प्रतिशत सीधे दिया गया है, तो उसका मान = (प्रतिशत/100) × कुल। यदि इसके बजाय उसका कोण (डिग्री में) दिया गया है, तो पहले बदलें: प्रतिशत = (कोण/360) × 100। दो या अधिक श्रेणियों को मिलाने के लिए, पहले उनके प्रतिशत (या उनकी डिग्री) जोड़ें, फिर कुल को एक बार लागू करें — हर श्रेणी का मान अलग-अलग निकालकर उन्हें न जोड़ें, क्योंकि इससे गोलाई की त्रुटि आ सकती है। एक ऐसी श्रेणी खोजने के लिए जो सीधे नहीं बताई गई है, दिए गए प्रतिशतों (या डिग्री) के योग को 100% (या 360°) से घटाएं। एक ही पाई चार्ट के भीतर दो श्रेणियों की तुलना के लिए, रुपये में बदले बिना सीधे उनकी डिग्री या प्रतिशत को अनुपात के रूप में तुलना कर सकते हैं — जैसे यदि किराया 30% और भोजन 25% एक ही चार्ट का है, तो किराया : भोजन = 30 : 25 = 6 : 5, कुल जो भी हो। दो अलग-अलग पाई चार्टों (जैसे दो अलग वर्षों) में एक ही श्रेणी की तुलना केवल प्रतिशत से करना भ्रामक हो सकता है यदि कुल अलग हों — एक बहुत बड़े कुल का छोटा प्रतिशत भी एक छोटे कुल के बड़े प्रतिशत से ज़्यादा वास्तविक राशि हो सकता है। चार्टों के बीच तुलना करने से पहले हमेशा दोनों को वास्तविक मानों में बदलें।

उदाहरण

- एक परिवार का ₹40,000 का मासिक खर्च इस तरह बंटा है: किराया 30%, भोजन 25%, परिवहन 15%, बचत 20%, अन्य 10%। भोजन पर खर्च की गई राशि ज्ञात करें। हल: भोजन = ₹40,000 का 25%। = (25/100) × 40,000 = ₹10,000। उत्तर: ₹10,000
- उसी खर्च वितरण का उपयोग करते हुए (किराया 30%, भोजन 25%, परिवहन 15%, बचत 20%, अन्य 10%, कुल ₹40,000), किराया और परिवहन पर मिलाकर खर्च की गई राशि ज्ञात करें। हल: पहले प्रतिशत मिलाएं: किराया + परिवहन = 30% + 15% = 45%। ₹40,000 का 45% = (45/100) × 40,000 = ₹18,000। उत्तर: ₹18,000
- एक पाई चार्ट में, एक कंपनी के मार्केटिंग बजट को दर्शाने वाला कोण 72° है। यदि कुल बजट ₹15,00,000 है, तो मार्केटिंग को आवंटित राशि ज्ञात करें। हल: कोण को प्रतिशत में बदलें: (72/360) × 100 = 20%। ₹15,00,000 का 20% = (20/100) × 15,00,000 = ₹3,00,000। उत्तर: ₹3,00,000
- उसी कंपनी बजट (कुल ₹15,00,000) का उपयोग करते हुए, यदि R&D को 90° और परिचालन को 108° आवंटित है, तो R&D और परिचालन का संयुक्त प्रतिशत ज्ञात करें। हल: पहले डिग्री मिलाएं: 90° + 108° = 198°। प्रतिशत में बदलें: (198/360) × 100 = 55%। उत्तर: 55%
- उसी परिवार खर्च चार्ट का उपयोग करते हुए, किराया पर खर्च की गई राशि का भोजन पर खर्च की गई राशि से अनुपात ज्ञात करें। हल: चूंकि दोनों एक ही कुल के प्रतिशत हैं, उनका अनुपात बस प्रतिशतों का अनुपात है: 30 : 25। सरल करें: 30 : 25 = 6 : 5। उत्तर: 6 : 5
- वर्ष 1 (कुल बजट ₹10,00,000) में, मार्केटिंग बजट का 20% था। वर्ष 2 (कुल बजट ₹15,00,000) में, मार्केटिंग 15% था। क्या मार्केटिंग पर वास्तविक खर्च बढ़ा या घटा? हल: वर्ष 1 की राशि = 10,00,000 का 20% = ₹2,00,000। वर्ष 2 की राशि = 15,00,000 का 15% = ₹2,25,000। भले ही प्रतिशत 20% से 15% तक गिर गया, वास्तविक खर्च बढ़ गया (₹2,00,000 → ₹2,25,000), क्योंकि कुल बजट प्रतिशत के घटने से ज़्यादा बढ़ गया। उत्तर: बढ़ा (₹2,00,000 से ₹2,25,000), भले ही प्रतिशत गिरा
- एक पाई चार्ट में, चार श्रेणियां 80°, 100°, 70°, और 60° लेती हैं। पांचवीं (अनकही) श्रेणी की डिग्री और प्रतिशत ज्ञात करें। हल: ज्ञात डिग्रियों का योग = 80 + 100 + 70 + 60 = 310°। बची हुई डिग्री = 360° − 310° = 50°। प्रतिशत = (50/360) × 100 ≈ 13.9%। उत्तर: 50°, ≈ 13.9%
- Practice: उसी परिवार खर्च वितरण का उपयोग करते हुए (किराया 30%, भोजन 25%, परिवहन 15%, बचत 20%, अन्य 10%, कुल ₹40,000), बचत पर ख की गई राशि ज्ञात करें। (उत्तर: ₹8,000)
- Practice: एक पाई चार्ट में, एक विभाग के बजट को दर्शाने वाला कोण 54° है। यदि कुल बजट ₹20,00,000 है, तो आवंटित राशि ज्ञात करें। (उत्तर: ₹3,00,000)
- Practice: उसी कंपनी बजट (कुल ₹15,00,000) का उपयोग करते हुए जिसमें मार्केटिंग 72°, R&D 90°, और परिचालन 108° है, शेष श्रेणियों को मिलाकर आवंटित डिग्री ज्ञात करें। (उत्तर: 90°)
- Practice: उसी परिवार खर्च चार्ट का उपयोग करते हुए, परिवहन पर खर्च की गई राशि का बचत पर खर्च की गई राशि से अनुपात ज्ञात करें। (उत्तर: 3 : 4। प्रतिशतों का अनुपात: 15:20।)

- Practice: वर्ष 1 (कुल ₹8,00,000) में, R&D बजट का 25% था। वर्ष 2 (कुल ₹6,00,000) में, R&D 30% था। दोनों वर्षों की वास्तविक राशि ज्ञात करें और बताएं कि यह बढ़ी या घटी। (उत्तर: वर्ष 1 = ₹2,00,000; वर्ष 2 = ₹1,80,000 — घटी, भले ही प्रतिशत 25% से 30% तक बढ़ा।)
- Practice: एक पाई चार्ट में, चार श्रेणियां 90°, 60°, 75°, और 45° लेती हैं। पांचवीं श्रेणी की डिग्री ज्ञात करें। (उत्तर: 90°। 360 − (90+60+75+45)।)
- Practice: एक पाई चार्ट में ₹24,00,000 के बजट में से, एक विभाग को 45° आवंटित है। आवंटित राशि ज्ञात करें। (उत्तर: ₹3,00,000। (45/360)×100 = 12.5%; 12.5% का 24,00,000।)

त्वरित दोहराव: हर पाई चार्ट 360° (एक पूर्ण वृत्त) और 100% तक जुड़ता है — हर श्रेणी का हिस्सा पूरे का एक प्रतिशत है, या समान रूप से 360° का एक भिन्न है।; यदि किसी श्रेणी का प्रतिशत सीधे दिया गया है, तो उसका मान = (प्रतिशत/100) × कुल। यदि इसके बजाय उसका कोण (डिग्री में) दिया गया है, तो पहले बदलें: प्रतिशत = (कोण/360) × 100।; दो या अधिक श्रेणियों को मिलाने के लिए, पहले उनके प्रतिशत (या उनकी डिग्री) जोड़ें, फिर कुल को एक बार लागू करें — हर श्रेणी का मान अलग-अलग निकालकर उन्हें न जोड़ें, क्योंकि इससे गोलाई की त्रुटि आ सकती है।; एक ऐसी श्रेणी खोजने के लिए जो सीधे नहीं बताई गई है, दिए गए प्रतिशतों (या डिग्री) के योग को 100% (या 360°) से घटाएं।; एक ही पाई चार्ट के भीतर दो श्रेणियों की तुलना के लिए, रुपये में बदले बिना सीधे उनकी डिग्री या प्रतिशत को अनुपात के रूप में तुलना कर सकते हैं — जैसे यदि किराया 30% और भोजन 25% एक ही चार्ट का है, तो किराया : भोजन = 30 : 25 = 6 : 5, कुल जो भी हो।; दो अलग-अलग पाई चार्टों (जैसे दो अलग वर्षों) में एक ही श्रेणी की तुलना केवल प्रतिशत से करना भ्रामक हो सकता है यदि कुल अलग हों — एक बहुत बड़े कुल का छोटा प्रतिशत भी एक छोटे कुल के बड़े प्रतिशत से ज़्यादा वास्तविक राशि हो सकता है। चार्टों के बीच तुलना करने से पहले हमेशा दोनों को वास्तविक मानों में बदलें।

बार ग्राफ (Bar Graph) के प्रश्न हल सहित

एक बार ग्राफ, Data Interpretation ही है जिसमें हर श्रेणी का मान एक तालिका सेल के बजाय सीधे एक बार की ऊंचाई से पढ़ा जाता है — एक बार संख्याएं सही ढंग से पढ़ लेने के बाद, यह हर दूसरे DI प्रारूप जैसा ही प्रतिशत, औसत और अनुपात वाला काम है। इस पेज में यह मुख्य विचार, समूहित (कई-श्रृंखला) बार ग्राफ, और भ्रामक अक्ष की चेतावनी शामिल है, साझा डेटा सेट का उपयोग करते हुए कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। हर बार की ऊंचाई (या क्षैतिज बार ग्राफ के लिए, लंबाई) उस श्रेणी के मान को अक्ष पर दिखाए गए पैमाने पर दर्शाती है — कुछ भी गणना करने से पहले इसे अक्ष के निशानों के विरुद्ध ध्यान से पढ़ें। दो बार के बीच प्रतिशत परिवर्तन वही नियम उपयोग करता है जो किसी भी अन्य प्रतिशत प्रश्न में होता है: (नया − पुराना) / पुराना × 100, जिसमें पहले वाला बार मूल मान होता है। "किस अवधि में सबसे अधिक/कम परिवर्तन हुआ" वाले प्रश्नों के लिए, पहले हर अवधि-से-अवधि परिवर्तन की गणना करें और उन्हें लिख लें, यह अंदाज़ा लगाने की कोशिश करने के बजाय कि कौन से बार सबसे अलग दिखते हैं। कई बार में एक औसत बस उनका योग उनकी गिनती से भाग देने पर है — बार ग्राफ प्रारूप सूत्र नहीं बदलता, केवल यह बदलता है कि आप इनपुट मान कैसे पढ़ते हैं। कुछ बार ग्राफ हर श्रेणी के लिए दो या अधिक बार दिखाते हैं (एक "समूहित" बार ग्राफ) — जैसे हर वर्ष में लड़कों और लड़कियों के लिए अलग बार। गणना के दौरान श्रृंखलाओं को अलग रखें; उन्हें केवल तभी जोड़ें या औसत करें जब प्रश्न स्पष्ट रूप से संयुक्त आंकड़ा मांगे। ऐसे y-अक्ष से सावधान रहें जो शून्य से शुरू नहीं होता ("टूटा हुआ" या छोटा किया गया अक्ष) — बार दिखने में बहुत अलग लग सकते हैं भले ही उनके बीच वास्तविक प्रतिशत अंतर छोटा हो। हमेशा अक्ष पर दिए गए वास्तविक मानों से गणना करें, बार कितने ऊंचे दिखते हैं इससे नहीं।

उदाहरण

- एक बार ग्राफ पांच महीनों में एक दुकान द्वारा बेची गई किताबों की संख्या दिखाता है: जनवरी 120, फरवरी 150, मार्च 90, अप्रैल 180, मई 160। जनवरी से फरवरी तक बिकी किताबों में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें। हल: वृद्धि = 150 − 120 = 30। प्रतिशत वृद्धि = (30/120) × 100 = 25%। उत्तर: 25%
- उसी डेटा का उपयोग करते हुए (जनवरी 120, फरवरी 150, मार्च 90, अप्रैल 180, मई 160), पांच महीनों में प्रति माह औसत बिकी किताबों की संख्या ज्ञात करें। हल: योग = 120 + 150 + 90 + 180 + 160 = 700। औसत = 700 / 5 = 140। उत्तर: 140 किताबें
- उसी डेटा का उपयोग करते हुए, मार्च में बिकी किताबों का अप्रैल में बिकी किताबों से अनुपात ज्ञात करें। हल: अनुपात = 90 : 180। दोनों पदों को उनके HCF, 90, से भाग देने पर: 1 : 2। उत्तर: 1 : 2
- उसी डेटा का उपयोग करते हुए, किस महीने-से-महीने संक्रमण में प्रतिशत कमी सबसे अधिक थी, और वह प्रतिशत क्या था? हल: हर संक्रमण जांचें: जनवरी→फरवरी एक वृद्धि है। फरवरी→मार्च: 60 की कमी, (60/150)×100 = 40%। मार्च→अप्रैल एक वृद्धि है। अप्रैल→मई: 20 की कमी, (20/180)×100 ≈ 11.1%। सबसे अधिक कमी फरवरी→मार्च में 40% पर है। उत्तर: फरवरी से मार्च, 40% की कमी
- एक समूहित बार ग्राफ 3 मैचों में दो बैट्समैन के बनाए रन दिखाता है: मैच 1: A = 40, B = 55; मैच 2: A = 65, B = 50; मैच 3: A = 50, B = 70। हर बैट्समैन के कुल रन ज्ञात करें। हल: A का कुल = 40 + 65 + 50 = 155। B का कुल = 55 + 50 + 70 = 175। उत्तर: A = 155 रन, B = 175 रन
- उसी डेटा का उपयोग करते हुए, किस मैच में दोनों बैट्समैन के स्कोर का अंतर सबसे अधिक था, और वह अंतर क्या था? हल: मैच 1: |55−40| = 15। मैच 2: |65−50| = 15। मैच 3: |70−50| = 20। सबसे अधिक अंतर मैच 3 में, 20 रन का है। उत्तर: मैच 3, 20 रन का अंतर
- एक बार ग्राफ का y-अक्ष 80 से शुरू होता है (0 से नहीं)। दो बार वास्तविक मान 92 और 96 दर्शाते हैं। एक नज़र में, छोटे किए अक्ष के कारण दूसरा बार बहुत बड़ा उछाल जैसा दिखता है। पहले बार से दूसरे तक वास्तविक प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें। हल: हमेशा वास्तविक मानों से गणना करें, बार की दिखने वाली ऊंचाई से नहीं: वृद्धि = 96 − 92 = 4। प्रतिशत वृद्धि = (4/92) × 100 ≈ 4.35%। यह एक मामूली वृद्धि है, भले ही 80 से शुरू होने वाला छोटा किया अक्ष इसे नाटकीय दिखा सकता है। उत्तर: ≈ 4.35%
- Practice: उसी डेटा का उपयोग करते हुए (जनवरी 120, फरवरी 150, मार्च 90, अप्रैल 180, मई 160 किताबें), मार्च से अप्रैल तक बिकी किताबों में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें। (उत्तर: 100%)
- Practice: उसी डेटा का उपयोग करते हुए, जनवरी, फरवरी और मार्च में बिकी कुल किताबें ज्ञात करें। (उत्तर: 360 किताबें)
- Practice: उसी डेटा का उपयोग करते हुए, जनवरी में बिकी किताबों का मई में बिकी किताबों से अनुपात ज्ञात करें। (उत्तर: 3 : 4)

- Practice: एक समूहित बार ग्राफ 3 तिमाहियों में दो उत्पादों की बिक्री (₹ हज़ार में) दिखाता है: Q1: X=30, Y=45; Q2: X=50, Y=40; Q3: X=45, Y=65। हर उत्पाद की कुल बिक्री ज्ञात करें। (उत्तर: X = 125, Y = 150 (₹ हज़ार)।)
- Practice: उसी डेटा का उपयोग करते हुए, किस तिमाही में X और Y की बिक्री का अंतर सबसे अधिक था? (उत्तर: Q3, 20 (65−45) का अंतर।)
- Practice: एक बार ग्राफ का y-अक्ष 50 से शुरू होता है (0 से नहीं)। दो बार वास्तविक मान 61 और 64 दर्शाते हैं। पहले से दूसरे तक वास्तविक प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें। (उत्तर: ≈ 4.92%। (64−61)/61 × 100।)
- Practice: उत्पाद बिक्री डेटा (Q1: X=30,Y=45; Q2: X=50,Y=40; Q3: X=45,Y=65) का उपयोग करते हुए, उत्पाद Y की औसत तिमाही बिक्री ज्ञात करें। (उत्तर: ₹50 हज़ार। (45+40+65)/3।)

> **त्वरित दोहराव:** हर बार की ऊंचाई (या क्षैतिज बार ग्राफ के लिए, लंबाई) उस श्रेणी के मान को अक्ष पर दिखाए गए पैमाने पर दर्शाती है — कुछ भी गणना करने से पहले इसे अक्ष के निशानों के विरुद्ध ध्यान से पढ़ें।; दो बार के बीच प्रतिशत परिवर्तन वही नियम उपयोग करता है जो किसी भी अन्य प्रतिशत प्रश्न में होता है: (नया − पुराना) / पुराना × 100, जिसमें पहले वाला बार मूल मान होता है।; "किस अवधि में सबसे अधिक/कम परिवर्तन हुआ" वाले प्रश्नों के लिए, पहले हर अवधि-से-अवधि परिवर्तन की गणना करें और उन्हें लिख लें, यह अंदाज़ा लगाने की कोशिश करने के बजाय कि कौन से बार सबसे अलग दिखते हैं।; कई बार में एक औसत बस उनका योग उनकी गिनती से भाग देने पर है — बार ग्राफ प्रारूप सूत्र नहीं बदलता, केवल यह बदलता है कि आप इनपुट मान कैसे पढ़ते हैं।; कुछ बार ग्राफ हर श्रेणी के लिए दो या अधिक बार दिखाते हैं (एक "समूहित" बार ग्राफ) — जैसे हर वर्ष में लड़कों और लड़कियों के लिए अलग बार। गणना के दौरान श्रृंखलाओं को अलग रखें; उन्हें केवल तभी जोड़ें या औसत करें जब प्रश्न स्पष्ट रूप से संयुक्त आंकड़ा मांगे।; ऐसे y-अक्ष से सावधान रहें जो शून्य से शुरू नहीं होता ("टूटा हुआ" या छोटा किया गया अक्ष) — बार दिखने में बहुत अलग लग सकते हैं भले ही उनके बीच वास्तविक प्रतिशत अंतर छोटा हो। हमेशा अक्ष पर दिए गए वास्तविक मानों से गणना करें, बार कितने ऊंचे दिखते हैं इससे नहीं।

लाइन ग्राफ (Line Graph) के प्रश्न हल सहित

एक लाइन ग्राफ, समय (या किसी अन्य क्रमबद्ध चर) के साथ मानों को सीधी रेखाओं से जुड़े बिंदुओं के रूप में दर्शाता है — हर बिंदु की ऊंचाई उसी तरह पढ़ी जाती है जैसे एक बार की ऊंचाई पढ़ी जाती है, और एक बार संख्याएं सही ढंग से पढ़ लेने के बाद, यह हर दूसरे Data Interpretation प्रारूप जैसा ही प्रतिशत, औसत और अनुपात वाला काम है। इस पेज में यह मुख्य विचार, दो श्रृंखलाओं की तुलना करने वाले मल्टी-लाइन ग्राफ, और प्लॉट किए बिंदुओं से आगे रुझान न बढ़ाने का कारण शामिल है, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। रेखा पर हर बिंदु उस वर्ष (या अवधि) पर एक मान को अक्ष पर दिखाए गए पैमाने पर दर्शाता है — ढलान से अंदाज़ा लगाने के बजाय इसे अक्ष के निशानों के विरुद्ध पढ़ें। दो बिंदुओं के बीच प्रतिशत परिवर्तन वही नियम उपयोग करता है जो किसी भी अन्य प्रतिशत प्रश्न में होता है: (नया − पुराना) / पुराना × 100, जिसमें पहले वाला बिंदु मूल मान होता है। एक तेज़ी से ऊपर जाने वाला खंड एक बड़ी वृद्धि दर्शाता है और एक तेज़ी से नीचे जाने वाला खंड एक बड़ी कमी — लेकिन "तेज़ी" केवल एक मोटा संकेत है; "किस अवधि में सबसे बड़ा परिवर्तन हुआ" वाले प्रश्नों के लिए, ढलान का अंदाज़ा लगाने के बजाय पहले हर खंड के परिवर्तन की गणना करें। कई बिंदुओं में एक औसत बस उनका योग उनकी गिनती से भाग देने पर है, बिल्कुल एक बार ग्राफ या तालिका की तरह — प्रारूप सूत्र नहीं बदलता, केवल यह बदलता है कि आप इनपुट मान कैसे पढ़ते हैं। कुछ लाइन ग्राफ एक ही अक्षों पर दो या अधिक रेखाएं दिखाते हैं (जैसे समान वर्षों में दो अलग कंपनियों की बिक्री) — हर रेखा को साझा पैमाने के विरुद्ध अलग-अलग पढ़ें। "A ने B को कब पीछे छोड़ा" वाला प्रश्न बस वह पहला प्लॉट किया बिंदु ढूंढना है जहां A का मान B से अधिक हो जाता है। किसी रुझान को प्लॉट किए बिंदुओं से आगे न बढ़ाएं। एक लाइन ग्राफ केवल दिखाए गए वर्षों में क्या हुआ बताता है — ढलान को एक न दिखाए गए वर्ष में आगे बढ़ाना यह मान लेता है कि पैटर्न ठीक वैसा ही जारी रहेगा, जिसकी पुष्टि चार्ट खुद नहीं करता।

उदाहरण

- एक लाइन ग्राफ पांच वर्षों में एक परीक्षा के लिए पंजीकृत उम्मीदवारों की संख्या (हज़ारों में) दिखाता है: 2020 — 200, 2021 — 250, 2022 — 300, 2023 — 270, 2024 — 360। 2020 से 2021 तक पंजीकरण में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें। हल: वृद्धि = 250 − 200 = 50। प्रतिशत वृद्धि = (50/200) × 100 = 25%। उत्तर: 25%
- उसी डेटा का उपयोग करते हुए (2020 — 200, 2021 — 250, 2022 — 300, 2023 — 270, 2024 — 360), पांच वर्षों में प्रति वर्ष औसत पंजीकृत उम्मीदवारों (हज़ारों में) की संख्या ज्ञात करें। हल: योग = 200 + 250 + 300 + 270 + 360 = 1380। औसत = 1380 / 5 = 276। उत्तर: 276 हज़ार
- उसी डेटा का उपयोग करते हुए, 2022 में पंजीकरण का 2024 में पंजीकरण से अनुपात ज्ञात करें। हल: अनुपात = 300 : 360। दोनों पदों को उनके HCF, 60, से भाग देने पर: 5 : 6। उत्तर: 5 : 6
- उसी डेटा का उपयोग करते हुए, किस वर्ष-से-वर्ष खंड में किसी भी दिशा में सबसे बड़ा प्रतिशत परिवर्तन हुआ, और वह क्या था? हल: हर खंड जांचें: 2020→2021: +50, (50/200)×100 = 25%। 2021→2022: +50, (50/250)×100 = 20%। 2022→2023: −30, (30/300)×100 = 10% की कमी। 2023→2024: +90, (90/270)×100 ≈ 33.3%। सबसे बड़ा परिवर्तन परिमाण में 2023→2024 है, लगभग 33.3% पर। उत्तर: 2023 से 2024, लगभग 33.3% की वृद्धि
- एक लाइन ग्राफ दो कंपनियों का वार्षिक लाभ (₹ लाख में) दिखाता है: 2020: P=40, Q=55; 2021: P=60, Q=50; 2022: P=70, Q=65। किस वर्ष में कंपनी P का लाभ पहली बार कंपनी Q से अधिक हुआ? हल: 2020 में, P (40) < Q (55)। 2021 में, P (60) > Q (50) पहली बार। तो 2021 वह पहला वर्ष है जब P, Q से आगे निकलता है (और 2022 में भी आगे रहता है: 70 > 65)। उत्तर: 2021
- उसी डेटा का उपयोग करते हुए, 2022 में दोनों कंपनियों का संयुक्त कुल लाभ ज्ञात करें। हल: कुल = 2022 में P + Q = 70 + 65 = ₹135 लाख। उत्तर: ₹135 लाख
- एक लाइन ग्राफ एक कंपनी की बिक्री को 100 (2020) से 130 (2021) से 160 (2022) तक बढ़ता दिखाता है। कोई दावा करता है कि 2023 में बिक्री "स्पष्ट रूप से" 190 होगी। क्या यह सीधे ग्राफ से निकाला जा सकने वाला सुरक्षित निष्कर्ष है? हल: ग्राफ केवल 2022 तक का डेटा दिखाता है, जहां वर्ष-दर-वर्ष वृद्धि

संयोग से हर बार स्थिर 30 इकाई रही (100→130→160)। 2023 में 190 होने का दावा यह मानता है कि यही 30-इकाई वृद्धि जारी रहेगी — लेकिन ग्राफ खुद इसकी पुष्टि करने वाला कोई डेटा बिंदु नहीं देता, और वास्तविक रुझान उन कारकों से बदल सकते हैं जो चार्ट नहीं दिखाता। तो यह एक देखे गए पैटर्न पर आधारित धारणा है, वह नहीं जो ग्राफ वास्तव में दिखाता है। उत्तर: नहीं — यह मानता है कि रुझान वैसा ही जारी रहेगा, जिसकी ग्राफ पुष्टि नहीं करता

- Practice: उसी डेटा का उपयोग करते हुए (2020 – 200, 2021 – 250, 2022 – 300, 2023 – 270, 2024 – 360 हज़ार), 2022 से 2023 तक पंजीकरण में प्रतिशत परिवर्तन ज्ञात करें। (उत्तर: 10% की कमी)
- Practice: उसी डेटा का उपयोग करते हुए, 2020, 2021 और 2022 में कुल पंजीकरण (हज़ारों में) ज्ञात करें। (उत्तर: 750 हज़ार)
- Practice: उसी डेटा का उपयोग करते हुए, 2021 में पंजीकरण का 2024 में पंजीकरण से अनुपात ज्ञात करें। (उत्तर: 25 : 36)
- Practice: एक लाइन ग्राफ दो दुकानों का राजस्व (₹ लाख में) दिखाता है: 2020: A=35, B=50; 2021: A=55, B=48; 2022: A=65, B=60। किस वर्ष में दुकान A का राजस्व पहली बार दुकान B से अधिक हुआ? (उत्तर: 2021। A (55) > B (48) पहली बार; 2020 में A पीछे था।)
- Practice: उसी डेटा का उपयोग करते हुए, 2021 में दोनों दुकानों का संयुक्त कुल राजस्व ज्ञात करें। (उत्तर: ₹103 लाख। 55 + 48।)
- Practice: एक लाइन ग्राफ एक शहर की आबादी को 10,000 (2018) से 12,000 (2019) से 14,500 (2020) तक बढ़ता दिखाता है। क्या यह मान लेना सुरक्षित है कि 2021 में आबादी ठीक 17,000 होगी, केवल इस ग्राफ के आधार पर? (उत्तर: नहीं। वर्ष-दर-वर्ष वृद्धि (2,000, फिर 2,500) भी स्थिर नहीं है, तो पैट को ठीक 17,000 तक बढ़ाना एक असमर्थित धारणा है, जो ग्राफ पुष्टि नहीं करता।)
- Practice: शहर की आबादी डेटा (2018: 10,000; 2019: 12,000; 2020: 14,500) का उपयोग करते हुए, तीन वर्षों की औसत आबादी ज्ञात करें। (उत्तर: ≈ 12,166.67। (10,000+12,000+14,500)/3।)

त्वरित दोहराव: रेखा पर हर बिंदु उस वर्ष (या अवधि) पर एक मान को अक्ष पर दिखाए गए पैमाने पर दर्शाता है — ढलान से अंदाज़ा लगाने के बजाय इसे अक्ष के निशानों के विरुद्ध पढ़ें।; दो बिंदुओं के बीच प्रतिशत परिवर्तन वही नियम उपयोग करता है जो किसी भी अन्य प्रतिशत प्रश्न में होता है: (नया − पुराना) / पुराना × 100, जिसमें पहले वाला बिंदु मूल मान होता है।; एक तेज़ी से ऊपर जाने वाला खंड एक बड़ी वृद्धि दर्शाता है और एक तेज़ी से नीचे जाने वाला खंड एक बड़ी कमी — लेकिन "तेज़ी" केवल एक मोटा संकेत है; "किस अवधि में सबसे बड़ा परिवर्तन हुआ" वाले प्रश्नों के लिए, ढलान का अंदाज़ा लगाने के बजाय पहले हर खंड के परिवर्तन की गणना करें।; कई बिंदुओं में एक औसत बस उनका योग उनकी गिनती से भाग देने पर है, बिल्कुल एक बार ग्राफ या तालिका की तरह — प्रारूप सूत्र नहीं बदलता, केवल यह बदलता है कि आप इनपुट मान कैसे पढ़ते हैं।; कुछ लाइन ग्राफ एक ही अक्षों पर दो या अधिक रेखाएं दिखाते हैं (जैसे समान वर्षों में दो अलग कंपनियों की बिक्री) — हर रेखा को साझा पैमाने के विरुद्ध अलग-अलग पढ़ें। "A ने B को कब पीछे छोड़ा" वाला प्रश्न बस वह पहला प्लॉट किया बिंदु ढूंढना है जहां A का मान B से अधिक हो जाता है।; किसी रुझान को प्लॉट किए बिंदुओं से आगे न बढ़ाएं। एक लाइन ग्राफ केवल दिखाए गए वर्षों में क्या हुआ बताता है — ढलान को एक न दिखाए गए वर्ष में आगे बढ़ाना यह मान लेता है कि पैटर्न ठीक वैसा ही जारी रहेगा, जिसकी पुष्टि चार्ट खुद नहीं करता।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/data-interpretation/

नंबर सिस्टम

संख्या पद्धति: विभाज्यता, गुणनखंड, घात और शेषफल

किसी ऋणेतर पूर्णांक N और धनात्मक भाजक d के लिए, N = dq + r लिखें जहाँ q एक पूर्णांक भागफल है और 0 ≤ r < d; किसी गुणज तक पहुँचने के लिए घटाई जाने वाली न्यूनतम मात्रा r है, जबकि जोड़ी जाने वाली न्यूनतम ऋणेतर मात्रा r = 0 होने पर 0 है, अन्यथा d − r है।

कोई संख्या 9 से विभाज्य होती है जब उसके अंकों का योग 9 से विभाज्य हो, और 11 से विभाज्य होती है जब उसके एकांतर अंकों के योगों का अंतर 11 का गुणज हो, शून्य सहित।

अभाज्य संख्या वह पूर्णांक है जो 1 से बड़ा हो और जिसके ठीक दो धनात्मक गुणनखंड हों, और यदि N का अभाज्य गुणनखंडन p^a × q^b × … है, तो उसके धनात्मक गुणनखंडों की संख्या (a + 1)(b + 1)… है और उसके गुणनखंडों का योग (1 + p + … + p^a)(1 + q + … + q^b)… है।

पूर्ण वर्ग में केवल सम अभाज्य घातांक होते हैं और पूर्ण घन में अभाज्य घातांक 3 से विभाज्य होते हैं; निम्नतम रूप में कोई भिन्न आधार 10 में तभी समाप्त होती है जब उसके हर में केवल अभाज्य संख्याएँ 2 और 5 हों, जिनमें बड़ा घातांक उसके न्यूनतम दशमलव स्थानों को निर्धारित करता है।

n! = 1 × 2 × … × n के लिए, किसी अभाज्य p का घातांक floor(n/p) + floor(n/p²) + … होता है जब तक पद शून्य न हो जाएँ, जहाँ floor का अर्थ है नीचे की ओर पूर्णांकित करना; अंत के शून्यों की गिनती 5 के घातांक से होती है क्योंकि 2 के गुणनखंड अधिक प्रचुर होते हैं।

घातों के लिए सत्यापित आवर्ती इकाई-अंक चक्र का उपयोग करें, किसी भाजक के सापेक्ष पूर्णांक व्यंजकों का मूल्यांकन करते समय ज्ञात शेषफल प्रतिस्थापित करें, पहले n धनात्मक विषम पूर्णांकों के योग के लिए n^2 और पहले n धनात्मक सम पूर्णांकों के योग के लिए n(n + 1) का उपयोग करें, और a से b तक क्रमागत पूर्णांक सूचकांकों की गिनती b − a + 1 के रूप में करें।

उदाहरण

- शेषफल और निकटतम गुणज: 725 = 18 × 40 + 5, अतः शेषफल 5 है, न्यूनतम घटाव 5 है, और न्यूनतम जोड़ 18 − 5 = 13 है; जाँच लें कि 725 − 5 = 720 और 725 + 13 = 738, 18 के क्रमागत गुणज हैं।
- गुणनखंड और पूर्ण घातें: $72 = 2^3 \times 3^2$ के (3 + 1)(2 + 1) = 12 धनात्मक गुणनखंड हैं; इसे गुणा करके पूर्ण वर्ग बनाने के लिए 2 का एक गुणनखंड जोड़ें, जिससे 72 × 2 = 144 = 12^2 मिलता है; इसे गुणा करके पूर्ण घन बनाने के लिए 3 का एक गुणनखंड जोड़ें, जिससे 72 × 3 = 216 = 6^3 मिलता है।

- क्रमगुणित और दशमलव स्थान: 25! के floor(25/5) + floor(25/25) = 5 + 1 = 6 अंत के शून्य हैं; अलग से, 7/40 का हर $2^3 \times 5$ है, अतः तीन दशमलव स्थान आवश्यक हैं, और 7/40 = 175/1000 = 0.175।

> **त्वरित दोहराव:** N = dq + r; गुणनखंड संख्या = ∏(घातांक + 1); वर्ग/घन घातांक 2/3 के गुणज हैं; क्रमगुणित अभाज्य घातांक = Σ floor(n/p^j); विषम योग = n^2; सम योग = n(n + 1); समावेशी सूचकांक गिनती = अंतिम − प्रथम + 1।

नंबर सिस्टम के प्रश्न हल सहित

नंबर सिस्टम के प्रश्न कुछ विभाज्यता शॉर्टकट और कुछ मानक गणना सूत्रों को जानने का इनाम देते हैं — योग सूत्र, इकाई अंक के चक्र, किसी फैक्टोरियल में अंतिम शून्यों की संख्या, और किसी संख्या के गुणनखंडों की संख्या — तो आपको कभी किसी विशाल संख्या को पूरी तरह निकालने की ज़रूरत नहीं पड़ती। इस पेज में यह सब, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ, दिया गया है। विभाज्यता नियम आपको बिना भाग किए यह जांचने देते हैं कि कोई संख्या किसी छोटी संख्या से विभाज्य है या नहीं: 2 से यदि अंतिम अंक सम हो; 3 से यदि अंकों का योग 3 से विभाज्य हो; 4 से यदि अंतिम दो अंक 4 से विभाज्य संख्या बनाएं; 5 से यदि अंतिम अंक 0 या 5 हो; 9 से यदि अंकों का योग 9 से विभाज्य हो; 11 से यदि विषम और सम स्थितियों (दाईं ओर से गिनते हुए) के अंकों के योग का अंतर 11 से विभाज्य हो। जब किसी संख्या N को भाजक D से भाग दिया जाता है, तो N = D × Q + R, जहां Q भागफल है और R शेषफल है, 0 ≤ R < D के साथ। यह संबंध हर शेषफल वाले प्रश्न की नींव है। शेषफल जोड़ और गुणा के तहत पूर्वानुमानित व्यवहार करते हैं: आप पूरे व्यंजक को निकालने के बजाय पहले हर हिस्से का शेषफल ले सकते हैं — यह "किसी बड़ी घात का शेषफल ज्ञात करें" वाले प्रश्नों के लिए उपयोगी है, जहां क्रमिक घातों के शेषफल आमतौर पर एक छोटे चक्र में दोहराते हैं। कोई संख्या पूर्ण वर्ग है यदि उसके अभाज्य गुणनखंडन में हर घात सम हो; यह पूर्ण घन है यदि हर घात 3 का गुणज हो। उपयोगी योग सूत्र: पहली n प्राकृत संख्याओं का योग = n(n+1)/2; पहले n वर्गों का योग = n(n+1)(2n+1)/6; पहले n घनों का योग = $[n(n+1)/2]^2$। a^n का इकाई अंक ज्ञात करने के लिए, a की घातों के इकाई अंकों का (छोटा) चक्र ढूंढें, फिर सही स्थिति चुनने के लिए n mod (चक्र की लंबाई) का उपयोग करें — यदि यह शेषफल 0 आता है, तो यह चक्र की अंतिम प्रविष्टि की ओर इशारा करता है, ज़रूरी नहीं कि a के अपने इकाई अंक की ओर। n! में अंतिम शून्यों की संख्या = 1 से n तक की संख्याओं में 5 कितनी बार विभाजित होता है (5 के गुणज गिनें, फिर 25 के, फिर 125 के, ... और जोड़ें)। केवल 5 गिनें, 2 नहीं — किसी फैक्टोरियल में हमेशा 2 के गुणनखंड 5 से ज़्यादा होते हैं, तो 5 ही सीमित करने वाला कारक है। N के अभाज्य गुणनखंडन $N = p_1^a \times p_2^b \times \ldots$ से, N के गुणनखंडों की संख्या = (a+1) × (b+1) × ... होती है — हर घात अपनी पसंद की संख्या (0 से उस घात तक) देती है, जिन्हें गुणा किया जाता है।

उदाहरण

- जांचें कि 4,572, 9 से विभाज्य है या नहीं। हल: अंकों का योग = 4 + 5 + 7 + 2 = 18। 18, 9 से विभाज्य है, तो 4,572, 9 से विभाज्य है। उत्तर: हां, 9 से विभाज्य है
- जांचें कि 9,251, 11 से विभाज्य है या नहीं। हल: दाईं ओर से: स्थिति 1 = 1, स्थिति 2 = 5, स्थिति 3 = 2, स्थिति 4 = 9। विषम स्थितियों (1ली, 3री) का योग = 1 + 2 = 3। सम स्थितियों (2री, 4थी) का योग = 5 + 9 = 14। अंतर = |3 − 14| = 11, जो 11 से विभाज्य है — तो 9,251, 11 से विभाज्य है। उत्तर: हां, 11 से विभाज्य है
- 7^{100} को 5 से भाग देने पर शेषफल ज्ञात करें। हल: 7^n mod 5 का पैटर्न ढूंढें: 7^1 mod 5 = 2, 7^2 mod 5 = 4, 7^3 mod 5 = 3, 7^4 mod 5 = 1, और फिर यह दोहराता है — 4 की लंबाई का एक चक्र। 100 ÷ 4 का कोई शेषफल नहीं बचता, तो 7^{100} चक्र की चौथी स्थिति पर आता है: शेषफल 1। उत्तर: 1
- एक संख्या को 15 से भाग देने पर शेषफल 7 बचता है। उसी संख्या को 5 से भाग देने पर शेषफल ज्ञात करें। हल: संख्या N = 15Q + 7 है, किसी भागफल Q के लिए। चूंकि 15, 5 का गुणज है, पद 15Q, 5 से पूरी तरह विभाज्य है। तो N को 5 से भाग देने पर शेषफल बस 7 mod 5 = 2 है। (Q = 1 से जांचें: N = 22, और 22 ÷ 5 पर शेषफल 2 बचता है।) उत्तर: 2
- पहली 20 प्राकृत संख्याओं का योग, उनके वर्गों का योग, और उनके घनों का योग ज्ञात करें। हल: पहली n संख्याओं का योग = n(n+1)/2 = 20 × 21 / 2 = 210। पहले n वर्गों का योग = n(n+1)(2n+1)/6 = (20 × 21 × 41) / 6 = 17,220 / 6 = 2,870। पहले n घनों का योग = $[n(n+1)/2]^2 = 210^2$ = 44,100। उत्तर: योग = 210, वर्गों का योग = 2,870, घनों का योग = 44,100
- 7^{95} का इकाई अंक ज्ञात करें। हल: 7 की घातों के इकाई अंक हर 4 चरणों में चक्र बनाते हैं: $7^1 \to 7$, $7^2 \to 9$, $7^3 \to 3$, $7^4 \to 1$, फिर दोहराता है। 95 = 4 × 23 + 3, तो शेषफल 3 है — यह चक्र की तीसरी प्रविष्टि की ओर इशारा करता है। तीसरी प्रविष्टि 3 है। उत्तर: 3
- 100! में अंतिम शून्यों की संख्या ज्ञात करें। हल: 100 तक 5 के गुणज गिनें: ⌊100/5⌋ = 20। 100 तक 25 के गुणज गिनें (हर एक से एक अतिरिक्त 5 मिलता है): ⌊100/25⌋ = 4। 100 तक 125 के गुणज: 0, क्योंकि 125 > 100। कुल अंतिम शून्य = 20 + 4 = 24। उत्तर: 24
- 360 के गुणनखंडों की संख्या ज्ञात करें। हल: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$। गुणनखंडों की संख्या = (3+1) × (2+1) × (1+1) = 4 × 3 × 2 = 24 उत्तर: 24
- Practice: जांचें कि 3,684, 4 से विभाज्य है या नहीं। (उत्तर: हां (अंतिम दो अंक, 84, 4 से विभाज्य हैं))
- Practice: जांचें कि 61,809, 11 से विभाज्य है या नहीं। (उत्तर: हां (विषम-स्थिति योग 23 में से सम-स्थिति योग 1 घटाने पर 22 मिलता है, जो 11 से विभाज्य है))
- Practice: एक संख्या को 24 से भाग देने पर शेषफल 11 बचता है। उसी संख्या को 8 से भाग देने पर शेषफल ज्ञात करें। (उत्तर: 3)
- Practice: पहली 15 प्राकृत संख्याओं का योग और उनके वर्गों का योग ज्ञात करें। (उत्तर: योग = 120, वर्गों का योग = 1,240। 15×16/2 = 120; (15×16×31)/6 = 7,440/6।)
- Practice: 8^{53} का इकाई अंक ज्ञात करें। (उत्तर: 8। 8 का चक्र 8,4,2,6 है (लंबाई 4); 53 = 4×13+1, तो पहली प्रविष्टि, जो 8 है।)
- Practice: 50! में अंतिम शून्यों की संख्या ज्ञात करें। (उत्तर: 12। ⌊50/5⌋ + ⌊50/25⌋ = 10 + 2।)

- Practice: 180 के गुणनखंडों की संख्या ज्ञात करें। (उत्तर: 18। $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$; (2+1)(2+1)(1+1) = 3×3×2।)

> **त्वरित दोहराव:** विभाज्यता नियम आपको बिना भाग किए यह जांचने देते हैं कि कोई संख्या किसी छोटी संख्या से विभाज्य है या नहीं: 2 से यदि अंतिम अंक सम हो; 3 से यदि अंकों का योग 3 से विभाज्य हो; 4 से यदि अंतिम दो अंक 4 से विभाज्य संख्या बनाएं; 5 से यदि अंतिम अंक 0 या 5 हो; 9 से यदि अंकों का योग 9 से विभाज्य हो; 11 से यदि विषम और सम स्थितियों (दाईं ओर से गिनते हुए) के अंकों के योग का अंतर 11 से विभाज्य हो।; जब किसी संख्या N को भाजक D से भाग दिया जाता है, तो N = D × Q + R, जहां Q भागफल है और R शेषफल है, 0 ≤ R < D के साथ। यह संबंध हर शेषफल वाले प्रश्न की नींव है।; शेषफल जोड़ और गुणा के तहत पूर्वानुमानित व्यवहार करते हैं: आप पूरे व्यंजक को निकालने के बजाय पहले हर हिस्से का शेषफल ले सकते हैं — यह "किसी बड़ी घात का शेषफल ज्ञात करें" वाले प्रश्नों के लिए उपयोगी है, जहां क्रमिक घातों के शेषफल आमतौर पर एक छोटे चक्र में दोहराते हैं।; कोई संख्या पूर्ण वर्ग है यदि उसके अभाज्य गुणनखंडन में हर घात सम हो; यह पूर्ण घन है यदि हर घात 3 का गुणज हो।; उपयोगी योग सूत्र: पहली n प्राकृत संख्याओं का योग = n(n+1)/2; पहले n वर्गों का योग = n(n+1)(2n+1)/6; पहले n घनों का योग = $[n(n+1)/2]^2$।; a^n का इकाई अंक ज्ञात करने के लिए, a की घातों के इकाई अंकों का (छोटा) चक्र ढूंढें, फिर सही स्थिति चुनने के लिए n mod (चक्र की लंबाई) का उपयोग करें — यदि यह शेषफल 0 आता है, तो यह चक्र की अंतिम प्रविष्टि की ओर इशारा करता है, ज़रूरी नहीं कि a के अपने इकाई अंक की ओर।; n! में अंतिम शून्यों की संख्या = 1 से n तक की संख्याओं में 5 कितनी बार विभाजित होता है (5 के गुणज गिनें, फिर 25 के, फिर 125 के, ... और जोड़ें)। केवल 5 गिनें, 2 नहीं — किसी फैक्टोरियल में हमेशा 2 के गुणनखंड 5 से ज़्यादा होते हैं, तो 5 ही सीमित करने वाला कारक है।; N के अभाज्य गुणनखंडन $N = p_1^a \times p_2^b \times \ldots$ से, N के गुणनखंडों की संख्या = (a+1) × (b+1) × ... होती है — हर घात अपनी पसंद की संख्या (0 से उस घात तक) देती है, जिन्हें गुणा किया जाता है।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/number-system/

प्रतिशत

प्रतिशत की मूल बातें

प्रतिशत का अर्थ है प्रति सौ में से हिस्सा। N का x% = (x × N) / 100।

उदाहरण

- 150 का 20% = (20 × 150) / 100 = 30

> **त्वरित दोहराव:** N का x% = (x×N)/100।

प्रतिशत रूपांतरण, परिवर्तन और अनुप्रयोग

प्रतिशत का अर्थ है प्रति सौ: किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए उसे 100 से गुणा करें, किसी प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिए उसे 100 से भाग दें, और किसी भाग की गणना (प्रतिशत/100) × संपूर्ण के रूप में करें।

किसी प्रतिशत तुलना या परिवर्तन को अपना संदर्भ आधार बताना चाहिए: भाग/संपूर्ण × 100 हिस्सा देता है, जबकि (नया − पुराना)/पुराना × 100 एक चिह्नित प्रतिशत परिवर्तन देता है, वृद्धि के लिए धनात्मक और कमी के लिए ऋणात्मक।

p% की वृद्धि मूल को 1 + p/100 से गुणा करती है और p% की कमी 1 − p/100 से; अंतिम मान को लागू गुणक से भाग देकर परिवर्तन को उलटें। क्रमिक परिवर्तन अपने गुणकों को गुणा करते हैं, अतः दो चिह्नित परिवर्तन a% और b% मिलकर a + b + ab/100 प्रतिशत बनते हैं, कमी के लिए ऋणात्मक मानों का उपयोग करते हुए; अतः समान वृद्धि और कमी परस्पर निरस्त नहीं होतीं।

अंकों के लिए, कुल प्राप्त अंकों को कुल संभावित अंकों से भाग दें; जनसंख्या के लिए, प्रत्येक स्पष्ट रूप से बताए गए प्रतिशत आधार का पालन करें और अलग से बताई गई निवासियों की संख्या जोड़ें या घटाएँ। बचत आय घटा व्यय के बराबर होती है, अतः बचत की तुलना करने से पहले आय और व्यय में परिवर्तन अलग-अलग लागू किए जाने चाहिए; यदि कीमत बदलती है लेकिन व्यय स्थिर रहता है, तो मात्रा कीमत के व्युत्क्रमानुपाती बदलती है।

उदाहरण

- रूपांतरण और अंक: 3/8 × 100 = 37.5%, और 37.5/100, 3/8 में घटता है; 640-अंकों की परीक्षा में 37.5% का स्कोर (3/8) × 640 = 240 अंक है, जिसकी पुष्टि 240/640 × 100 = 37.5% से होती है।
- क्रमिक परिवर्तन और उत्क्रमण: 800 का प्रारंभिक मान 20% बढ़कर 960 होता है और फिर 960 का 10% घटकर 864 होता है; कुल वृद्धि (864 − 800)/800 × 100 = 8% है, और मूल मान 864/(1.20 × 0.90) = 800 से पुनः प्राप्त होता है।
- आय और व्यय: ₹40000 की आय और ₹30000 के व्यय से ₹10000 की बचत होती है; 20% आय वृद्धि और 10% व्यय वृद्धि के बाद, राशियाँ ₹48000 और ₹33000 हो जाती हैं, अतः बचत ₹15000 हो जाती है, जो (15000 − 10000)/10000 × 100 = 50% की वृद्धि है।

> **त्वरित दोहराव:** p% = p/100; हिस्सा = भाग/संपूर्ण × 100; परिवर्तन% = (नया − पुराना)/पुराना × 100; नया = पुराना × (1 ± p/100); मूल = नया ÷ गुणक; क्रमिक गुणक गुणा होते हैं; बचत = आय − व्यय।

प्रतिशत के प्रश्न हल सहित

प्रतिशत का सही आधार चुनना, परिवर्तन से मूल मान निकालना, क्रमिक परिवर्तन जोड़ना और प्रतिशत तथा प्रतिशत-अंक का अंतर सीखें। सरल गणना से तुलना और आँकड़ों के प्रश्नों तक बढ़ें, फिर अभ्यास से अपनी विधि जाँचें। "प्रतिशत" का अर्थ है "प्रति सौ" — किसी संख्या N का x% = (x/100) × N होता है। प्रतिशत परिवर्तन (वृद्धि या कमी) हमेशा मूल मान पर आधारित होकर निकाला जाता है: (परिवर्तन / मूल मान) × 100। दो क्रमिक प्रतिशत परिवर्तनों a% और b% के लिए (कमी के लिए कोई भी ऋणात्मक हो सकता है), शुद्ध परिवर्तन होता है a + b + (ab/100) — सीधे a + b नहीं। प्रतिशत के प्रश्नों में यह सबसे आम गलती है। पहले आधार पहचानें: “A, B से 20% अधिक है” में B को 100% मानते हैं। उलटी तुलना में आधार बदलता है, इसलिए प्रतिशत भी बदलता है। r% वृद्धि का गुणक 1 + r/100 और कमी का गुणक 1 − r/100 है। मूल मान पाने के लिए अंतिम मान को गुणक से भाग दें; अंतिम मान में से वही प्रतिशत न घटाएँ। दर 40% से 50% होने पर अंतर 10 प्रतिशत-अंक है। सापेक्ष वृद्धि (50 − 40)/40 × 100 = 25% है। दोनों को अलग रखें। संयुक्त प्रतिशत में पहले वास्तविक संख्याएँ जोड़ें, फिर कुल आधार से भाग दें। प्रतिशतों का साधारण औसत तभी सही है जब आधार समान हों। जाँच: समान प्रतिशत की वृद्धि और कमी के बाद हानि होती है। छूट के बाद मूल्य मूल से कम होना चाहिए। प्रश्न के आधार के अनुसार परिणाम की तार्किकता देखें।

उदाहरण

- 240 का 35% क्या है? हल: 240 का 35% = (35/100) × 240 = 35 × 2.4 = 84 उत्तर: 84
- एक वस्तु की कीमत ₹800 से बढ़कर ₹920 हो गई। प्रतिशत वृद्धि क्या है? हल: वृद्धि = 920 − 800 = 120 प्रतिशत वृद्धि = (120 / 800) × 100 = 15% उत्तर: 15%
- एक संख्या को पहले 20% बढ़ाया जाता है, फिर परिणाम को 20% घटाया जाता है। शुद्ध प्रतिशत परिवर्तन क्या है? हल: क्रमिक परिवर्तन सूत्र का उपयोग करते हुए: शुद्ध परिवर्तन = a + b + (ab/100) = 20 + (−20) + (20 × −20)/100 = 0 − 4 = −4% सीधे जांचें: 100 से शुरू करें → 20% वृद्धि → 120 → 20% कमी → 120 × 0.8 = 96, जो 100 से 4% कम है। उत्तर: शुद्ध रूप से 4% की कमी (0% नहीं, भले ही +20 और −20 एक-दूसरे को रद्द करते हुए लगें)
- दो उम्मीदवारों के बीच एक चुनाव में, विजेता को 60% वोट मिले और वह 4,800 वोटों से जीता। कुल डाले गए वोटों की संख्या ज्ञात करें। हल: विजेता: 60%, हारने वाला: 40% → अंतर = कुल वोटों का 20% कुल का 20% = 4,800 कुल का 1% = 240 कुल का 100% = 24,000 उत्तर: 24,000 वोट
- 20% वृद्धि के बाद वेतन ₹28,800 है। मूल वेतन कितना था? हल: अंतिम = मूल × 1.20। मूल = 28,800 ÷ 1.20 = 24,000। जाँच: 24,000 का 20% = 4,800; कुल 28,800। अंतिम राशि का 20% घटाना गलत आधार होगा। उत्तर: ₹24,000
- A, B से 25% अधिक है। B, A से कितने प्रतिशत कम है? हल: B = 100 लें, तो A = 125। अंतर 25 है, लेकिन माँगी गई तुलना में आधार A है। 25/125 × 100 = 20%। उत्तर: 20%
- चावल का मूल्य 25% बढ़ता है। खर्च समान रखने के लिए खपत कितने प्रतिशत घटाएँ? हल: खर्च = मूल्य × मात्रा। पुराने मूल्य और मात्रा दोनों को 100 मानें। नया मूल्य 125 है। खर्च 10,000 रखने के लिए नई मात्रा = 10,000/125 = 80। 100 से 80 तक कमी 20% है। उत्तर: 20%
- 40 विद्यार्थियों की कक्षा में 75% और 60 विद्यार्थियों की कक्षा में 50% उत्तीर्ण हैं। संयुक्त उत्तीर्ण प्रतिशत क्या है? हल: पहली कक्षा में 40 × 0.75 = 30 उत्तीर्ण। दूसरी में 60 × 0.50 = 30 उत्तीर्ण। कुल 100 में 60 उत्तीर्ण = 60%। कक्षाओं के आकार अलग होने से 62.5% का साधारण औसत गलत है। उत्तर: 60%
- उत्तीर्ण दर 60% से 72% हो जाती है। प्रतिशत-अंक और सापेक्ष प्रतिशत वृद्धि निकालें। हल: प्रतिशत-अंक का अंतर = 72 − 60 = 12। पुरानी दर के आधार पर सापेक्ष वृद्धि = 12/60 × 100 = 20%। दोनों एक ही परिवर्तन को अलग इकाइयों में बताते हैं। उत्तर: 12 प्रतिशत-अंक; 20% सापेक्ष वृद्धि
- Practice: 160 का 45% कितना है? (उत्तर: 72। 40% + 5% = 64 + 8 = 72।)
- Practice: 250 से 300 तक कितने प्रतिशत वृद्धि है? (उत्तर: 20%। अंतर 50 और मूल आधार 250 है: 50/250 × 100।)
- Practice: किसी संख्या का 20% = 50 है। संख्या क्या है? (उत्तर: 250। 50 को 0.20 से भाग दें।)
- Practice: 15% छूट के बाद मूल्य ₹1,020 है। मूल मूल्य क्या है? (उत्तर: ₹1,200। अंतिम मूल्य मूल का 85% है: 1,020/0.85 = 1,200।)
- Practice: 10% और फिर 20% वृद्धि का शुद्ध प्रभाव क्या है? (उत्तर: 32% वृद्धि। 1.10 × 1.20 = 1.32; केवल प्रतिशत जोड़ने से बदला हुआ आधार छूट जाता है।)
- Practice: 20% कमी के बाद मूल मान पाने के लिए कितनी वृद्धि चाहिए? (उत्तर: 25%। 100 से 80 हुआ; अब 80 के आधार पर 20 बढ़ाना है: 20/80 × 100।)
- Practice: दर 8% से 10% हो जाती है। वृद्धि के दोनों माप बताइए। (उत्तर: 2 प्रतिशत-अंक और 25% सापेक्ष वृद्धि: 2/8 × 100 = 25।)
- Practice: 200 अभ्यर्थियों में 30% और अन्य 100 में 50% उत्तीर्ण हैं। कुल प्रतिशत? (उत्तर: 36⅔%। उत्तीर्ण 60 + 50 = 110, कुल 300; 110/300 × 100।)

त्वरित दोहराव: "प्रतिशत" का अर्थ है "प्रति सौ" — किसी संख्या N का x% = (x/100) × N होता है।; प्रतिशत परिवर्तन (वृद्धि या कमी) हमेशा मूल मान पर आधारित होकर निकाला जाता है: (परिवर्तन / मूल मान) × 100।; दो क्रमिक प्रतिशत परिवर्तनों a% और b% के लिए (कमी के लिए कोई भी ऋणात्मक हो सकता है), शुद्ध परिवर्तन होता है a + b + (ab/100) — सीधे a + b नहीं। प्रतिशत के प्रश्नों में यह सबसे आम गलती है।; पहले आधार पहचानें: “A, B से 20% अधिक है” में B को 100% मानते हैं। उलटी तुलना में आधार बदलता है, इसलिए प्रतिशत भी बदलता है।; r% वृद्धि का गुणक 1 + r/100 और कमी का गुणक 1 − r/100 है। मूल मान पाने के लिए अंतिम मान को गुणक से भाग दें; अंतिम मान में से वही प्रतिशत न घटाएँ।; दर 40% से 50% होने पर अंतर 10 प्रतिशत-अंक है। सापेक्ष वृद्धि (50 − 40)/40 × 100 = 25% है। दोनों को अलग रखें।; संयुक्त प्रतिशत में पहले वास्तविक संख्याएँ जोड़ें, फिर कुल आधार से भाग दें। प्रतिशतों का साधारण औसत तभी सही है जब आधार समान हों।; जाँच: समान प्रतिशत की वृद्धि और कमी के बाद हानि होती है। छूट के बाद मूल्य मूल से कम होना चाहिए। प्रश्न के आधार के अनुसार परिणाम की तार्किकता देखें।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/percentage-applications/

अनुपात और समानुपात

अनुपात, समानुपात, बँटवारा और आयु

एक अनुपात a:b मात्राओं की बताए गए क्रम में तुलना करता है; पहले मापों को समान इकाई में बदलें, दोनों पदों को समान रूप से गुणा करके भिन्न या दशमलव हटाएं, और निम्नतम रूप पाने के लिए पूर्णांक पदों को उनके महत्तम समापवर्तक से भाग दें। तुल्य अनुपात हर पद को समान शून्येतर गुणक से गुणा या भाग करते हैं, और a:b = c:d का अर्थ है ad = bc। किसी कुल T को अनुपात a:b में बांटने के लिए, हिस्से Ta/(a + b) और Tb/(a + b) दें, इसी भाग विधि को तीन या अधिक मात्राओं तक बढ़ाते हुए; यदि इसके बजाय एक अंतर दिया गया हो, तो उसे अनुपात भागों के अंतर से मिलाएं। a:b और c:d का मिश्रित अनुपात ac:bd है, जुड़े अनुपातों को अपनी साझा मात्रा के समान भाग संख्या देनी चाहिए, और a और b के बीच एक धनात्मक मध्य समानुपाती x, $x^2 = ab$ को संतुष्ट करता है। सीधे समानुपात में y/x स्थिर रहता है, जबकि व्युत्क्रम समानुपात में xy स्थिर रहता है; तो a और b के व्युत्क्रम में बांटने के लिए अनुपात 1/a:1/b = b:a उपयोग होता है। आयु प्रश्नों के लिए, वर्तमान आयु को एक साझा चर के गुणज के रूप में लिखें, भविष्य के अनुपात के लिए हर आयु में समान बीता हुआ समय जोड़ें या भूतकाल के अनुपात के लिए घटाएं, और जांचें कि बताए गए समय पर सभी आयु वैध हैं।

जब एक अनुपात के साथ एक अंतर (कुल नहीं) दिया जाए, तो ज्ञात अंतर को अनुपात के भागों के अंतर से मिलाएं, पूरे अनुपात पदों से नहीं: 3:5 अनुपात के लिए वास्तविक अंतर 20 के साथ, अनुपात भाग 5−3 = 2 से अलग हैं, तो हर भाग 20/2 = 10 का है, जिससे वास्तविक मान 30 और 50 मिलते हैं।

एक मिश्रित अनुपात बस दो अलग अनुपातों के संगत पदों को आपस में गुणा करता है: a:b और c:d मिलाने पर ac:bd मिलता है - उपयोगी जब एक अंतिम मात्रा एक साथ दो स्वतंत्र अनुपात संबंधों पर निर्भर करती है।

उदाहरण

- सरलीकरण और बँटवारा: 1.2:1.8 = 12:18 = 2:3; उस अनुपात में ₹1500 बांटने पर 5 कुल भाग हर एक ₹300 के बनते हैं, तो हिस्से ₹600 और ₹900 हैं।
- जोड़ना और व्युत्क्रम समानुपात: यदि A:B = 2:3 और B:C = 4:5 है, तो B को दोनों अनुपातों में 12 के बराबर बनाकर A:B:C = 8:12:15 मिलता है; अलग से, यदि 12 समान कर्मचारी एक निश्चित काम के लिए 18 दिन लेते हैं, तो 27 समान उत्पादक कर्मचारी 216/27 = 8 दिन लेंगे।
- आयु: यदि आशा:भरत = 2:3 अभी है और 4 वर्ष बाद उनका अनुपात 5:7 है, तो (2k + 4)/(3k + 4) = 5/7 लिखें; इससे k = 8 मिलता है और वर्तमान आयु 16 और 24 है।
- 4 और 16 के बीच मध्य समानुपाती ज्ञात करें। हल: $x^2 = 4×16 = 64$, तो x = 8 (धनात्मक मूल लेते हुए)। जांच: 4:8 = 1:2 और 8:16 = 1:2, दोनों तरफ समान अनुपात, पुष्टि करता है कि 8 मध्य समानुपाती है।
- दो संख्याएं 3:5 के अनुपात में हैं, और उनका अंतर 20 है। दोनों संख्याएं ज्ञात करें। हल: अनुपात भाग 5−3 = 2 से अलग हैं, और यह वास्तविक अंतर 20 के बराबर है, तो हर भाग 20/2 = 10 का है। संख्याएं 3×10=30 और 5×10=50 हैं।
- 2:3 और 4:5 का मिश्रित अनुपात ज्ञात करें। हल: संगत पदों को गुणा करें: (2×4):(3×5) = 8:15।

> **त्वरित दोहराव:** अनुपात a:b बताए गए क्रम में तुलना करता है; निम्नतम रूप में सरल करें। a:b=c:d का अर्थ ad=bc है। कुल T को अनुपात a:b में बांटना हिस्से Ta/(a+b) और Tb/(a+b) देता है। एक अंतर अनुपात भागों के अंतर से मिलता है, पूरे पदों से नहीं। a:b और c:d का मिश्रित अनुपात = ac:bd। a,b के बीच मध्य समानुपाती x: x^2=ab। व्युत्क्रम बँटवारा 1/a:1/b = b:a उपयोग करता है। आयु: kx के रूप में व्यक्त करें, भूत/भविष्य अनुपातों के लिए हर आयु में समान बीता समय बदलें।

अनुपात और समानुपात के प्रश्न हल सहित

अनुपात और समानुपात एक बुनियादी विषय है — उम्र, मिश्रण, साझेदारी और यहां तक कि कुछ लाभ-हानि के प्रश्न भी इसी पर आधारित होते हैं। इस पेज में मुख्य नियम, प्रत्यक्ष और व्युत्क्रम समानुपात, अनुपातों की तुलना और संयोजन, कई हल किए गए उदाहरण, और स्पष्टीकरण सहित अभ्यास प्रश्न दिए गए हैं। अनुपात a : b एक ही प्रकार की दो राशियों की तुलना करता है और इसकी कोई इकाई नहीं होती। दोनों पदों को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा या भाग करने पर समतुल्य अनुपात मिलता है। अनुपात के पद वास्तविक मात्राएं नहीं होते जब तक कोई कुल या एक वास्तविक मान न दिया गया हो — a : b = 3 : 5 का अर्थ है दो मात्राएं किसी गुणक x के लिए 3x और 5x हैं, जिसे प्रश्न के बाकी भाग से निकालना होता है। समानुपात दो बराबर अनुपात होते हैं: a : b = c : d, जिसका मतलब है a × d = b × c ("चरम पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल") — अधिकतर समानुपात के प्रश्न इसी क्रॉस-गुणन से हल होते हैं। किसी कुल राशि T को अनुपात a : b : c में बांटने के लिए, हर हिस्सा = (उस पद ÷ पदों का योग) × T होता है। एक साझा पद वाले दो अनुपातों a : b और b : c को एक तीन-पद वाले अनुपात a : b : c में मिलाने के लिए, हर अनुपात को इस तरह बड़ा करें कि साझा पद (b) दोनों में बराबर हो जाए — आमतौर पर उनका LCM निकालकर। दो राशियां प्रत्यक्ष समानुपात में होती हैं यदि उनका अनुपात स्थिर रहे (a/b = k); वे व्युत्क्रम समानुपात में होती हैं यदि उनका गुणनफल स्थिर रहे (a × b = k)। इन्हें गड्डमड्ड करना आम गलती है — स्थिर दूरी के लिए चाल और समय प्रत्यक्ष नहीं, व्युत्क्रम समानुपात में होते हैं, क्योंकि अधिक चाल का अर्थ कम समय है, अधिक नहीं। दो अनुपातों a : b और c : d की तुलना के लिए क्रॉस-गुणन करें: a × d की तुलना b × c से करें। यदि a × d > b × c, तो a : b > c : d। सतत समानुपात a : b = b : c में, मध्य पद b, a और c के बीच का मध्यानुपाती (mean proportional) होता है, और b = √(a × c)।

उदाहरण

- ₹720 को A और B के बीच 5 : 4 के अनुपात में बांटें। हल: अनुपात पदों का योग = 5 + 4 = 9 A का हिस्सा = (5/9) × 720 = 400 B का हिस्सा = (4/9) × 720 = 320 जांच: 400 + 320 = 720 उत्तर: A को ₹400, B को ₹320

- यदि a : b = 3 : 4 और b : c = 8 : 9, तो a : b : c ज्ञात करें। हल: साझा पद b है। पहले अनुपात में b = 4, दूसरे में b = 8 है — पहले अनुपात को इस तरह बड़ा करें कि उसका b भी 8 बन जाए: 3 : 4 के दोनों पदों को 2 से गुणा करें, जिससे 6 : 8 मिलता है। दूसरे अनुपात में b पहले से ही 8 है, तो वह 8 : 9 ही रहेगा। मिलाकर: a : b : c = 6 : 8 : 9। उत्तर: a : b : c = 6 : 8 : 9
- A और B की वर्तमान उम्रों का अनुपात 3 : 5 है। 6 वर्ष बाद, उनकी उम्रों का अनुपात 2 : 3 हो जाता है। A की वर्तमान उम्र ज्ञात करें। हल: मान लें वर्तमान उम्रें A = 3x और B = 5x हैं। 6 वर्ष बाद: (3x + 6) / (5x + 6) = 2 / 3 क्रॉस-गुणन करें: 3(3x + 6) = 2(5x + 6) → 9x + 18 = 10x + 12 → x = 6 A की वर्तमान उम्र = 3x = 18। जांच: 6 वर्ष बाद, A = 24, B = 36, और 24 : 36 = 2 : 3। उत्तर: 18 वर्ष
- यदि x : y = 2 : 3, तो (3x + 2y) : (4x − y) का मान ज्ञात करें। हल: मान लें x = 2k और y = 3k, किसी k के लिए। 3x + 2y = 3(2k) + 2(3k) = 6k + 6k = 12k 4x − y = 4(2k) − 3k = 8k − 3k = 5k अनुपात = 12k : 5k = 12 : 5 उत्तर: 12 : 5
- 15 मज़दूर एक काम को 8 दिनों में पूरा कर सकते हैं। समान दर पर काम करते हुए, वही काम 5 दिनों में पूरा करने के लिए कितने मज़दूर चाहिए? हल: एक निश्चित काम के लिए, मज़दूरों की संख्या और दिनों की संख्या व्युत्क्रम समानुपात में होती हैं — अधिक मज़दूर मतलब कम दिन। मज़दूर × दिन = स्थिरांक = 15 × 8 = 120। 5 दिनों के लिए: मज़दूर = 120 / 5 = 24। उत्तर: 24 मज़दूर
- कौन सा अनुपात बड़ा है: 3 : 4 या 5 : 7? हल: क्रॉस-गुणन करें: 3 × 7 की तुलना 4 × 5 से करें। 3 × 7 = 21, और 4 × 5 = 20। चूंकि 21 > 20, 3 : 4 बड़ा अनुपात है। उत्तर: 3 : 4 बड़ा है
- 4 और 25 के बीच मध्यानुपाती ज्ञात करें। हल: a और c के बीच मध्यानुपाती b होता है जहां b = √(a × c)। b = √(4 × 25) = √100 = 10 उत्तर: 10
- Practice: ₹1,500 को A, B और C के बीच 2 : 3 : 5 के अनुपात में बांटें। (उत्तर: A = ₹300, B = ₹450, C = ₹750। पदों का योग = 10; हर हिस्सा = (पद/10) × 1,500।)
- Practice: यदि a : b = 2 : 3 और b : c = 5 : 7, तो a : b : c ज्ञात करें। (उत्तर: a : b : c = 10 : 15 : 21। 2:3 को 5 से और 5:7 को 3 से गुणा करें ताकि b = 15 बराबर हो।)
- Practice: दो संख्याएं 4 : 5 के अनुपात में हैं। यदि उनका योग 108 है, तो दोनों संख्याएं ज्ञात करें। (उत्तर: 48 और 60। हर हिस्सा = 108/9 = 12; 4×12 और 5×12।)
- Practice: 12 पुरुष एक काम को 9 दिनों में पूरा करते हैं, प्रति व्यक्ति समान दर से। 18 पुरुष इसे कितने दिनों में पूरा करेंगे? (उत्तर: 6 दिन। पुरुष × दिन = 108 (स्थिरांक); 108/18 = 6।)
- Practice: कौन सा अनुपात बड़ा है: 7 : 9 या 11 : 13? (उत्तर: 11 : 13 बड़ा है। क्रॉस-गुणन: 7×13 = 91 और 9×11 = 99; 99 > 91।)
- Practice: 9 और 16 के बीच मध्यानुपाती ज्ञात करें। (उत्तर: 12। √(9 × 16) = √144।)
- Practice: दो संख्याएं 7 : 11 के अनुपात में हैं। छोटी संख्या 49 है। बड़ी संख्या ज्ञात करें। (उत्तर: 77। 49/7 = 7 गुणक x है; बड़ी संख्या = 11 × 7।)

त्वरित दोहराव: अनुपात a : b एक ही प्रकार की दो राशियों की तुलना करता है और इसकी कोई इकाई नहीं होती। दोनों पदों को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा या भाग करने पर समतुल्य अनुपात मिलता है।; अनुपात के पद वास्तविक मात्राएं नहीं होते जब तक कोई कुल या एक वास्तविक मान न दिया गया हो — a : b = 3 : 5 का अर्थ है दो मात्राएं किसी गुणक x के लिए 3x और 5x हैं, जिसे प्रश्न के बाकी भाग से निकालना होता है।; समानुपात दो बराबर अनुपात होते हैं: a : b = c : d, जिसका मतलब है a × d = b × c ("चरम पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल") — अधिकतर समानुपात के प्रश्न इसी क्रॉस-गुणन से हल होते हैं।; किसी कुल राशि T को अनुपात a : b : c में बांटने के लिए, हर हिस्सा = (उस पद ÷ पदों का योग) × T होता है।; एक साझा पद वाले दो अनुपातों a : b और b : c को एक तीन-पद वाले अनुपात a : b : c में मिलाने के लिए, हर अनुपात को इस तरह बड़ा करें कि साझा पद (b) दोनों में बराबर हो जाए — आमतौर पर उनका LCM निकालकर।; दो राशियां प्रत्यक्ष समानुपात में होती हैं यदि उनका अनुपात स्थिर रहे (a/b = k); वे व्युत्क्रम समानुपात में होती हैं यदि उनका गुणनफल स्थिर रहे (a × b = k)। इन्हें गड्डमड्ड करना आम गलती है — स्थिर दूरी के लिए चाल और समय प्रत्यक्ष नहीं, व्युत्क्रम समानुपात में होते हैं, क्योंकि अधिक चाल का अर्थ कम समय है, अधिक नहीं।; दो अनुपातों a : b और c : d की तुलना के लिए क्रॉस-गुणन करें: a × d की तुलना b × c से करें। यदि a × d > b × c, तो a : b > c : d।; सतत समानुपात a : b = b : c में, मध्य पद b, a और c के बीच का मध्यानुपाती (mean proportional) होता है, और b = √(a × c)।

मध्यानुपाती, तृतीयानुपाती और चतुर्थानुपाती के प्रश्न हल सहित

ये तीनों प्रश्न प्रकार आपसे एक गुम पद के साथ एक अनुपात को पूरा करने के लिए कहते हैं — असली कौशल केवल क्रॉस-गुणा करने से पहले सही अनुपात कथन स्थापित करना है। इस पेज में तीनों, ये गुणोत्तर श्रेणी (GP) से कैसे जुड़े हैं, और उलटे प्रश्न (अनुपाती मान देकर मूल संख्याओं में से एक निकालना) शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। a, b, c का चतुर्थानुपाती: x ज्ञात करें जहां a : b = c : x। क्रॉस-गुणा करने पर x = (b × c) / a मिलता है। a, b का तृतीयानुपाती: x ज्ञात करें जहां a : b = b : x — ध्यान दें b दोहराया गया है। क्रॉस-गुणा करने पर x = b^2 / a मिलता है। a और b के बीच मध्यानुपाती: x ज्ञात करें जहां a : x = x : b — इस बार x दोहराया गया है। क्रॉस-गुणा करने पर x^2 = a × b मिलता है, तो x = √(ab)। इन तीनों को मिलाना आसान है क्योंकि इन सभी में तीन दी गई-या-निहित संख्याएं शामिल होती हैं — क्रॉस-गुणा करने से पहले अनुपात कथन को स्पष्ट रूप से लिखें, अज्ञात को उसके सही स्थान पर रखते हुए। तीनों एक गुणोत्तर श्रेणी (GP) (लगातार पदों के बीच स्थिर अनुपात वाला क्रम) का वर्णन करते हैं: तृतीयानुपाती a, b, x को एक GP बनाता है; मध्यानुपाती a, x, b को एक GP बनाता है। यह पहचानना एक तेज़ जाँच देता है — लगातार पदों को भाग दें और देखें अनुपात हर बार वही है। उलटे प्रश्न आपको स्वयं अनुपाती मान देते हैं और तीन मूल संख्याओं में से एक पूछते हैं — वही क्रॉस-गुणा किया समीकरण पुनर्व्यवस्थित करें ताकि अब जो चर अज्ञात है वह अलग हो जाए, सामान्य वाले के बजाय। अपने उत्तर को वापस मूल अनुपात में एक वास्तविक अनुपात के रूप में रखकर जांचें (जैसे 3:5, सरल करने पर 12:20 के बराबर होना चाहिए) ताकि पुष्टि हो कि दोनों पक्ष वास्तव में मेल खाते हैं।

उदाहरण

- 3, 5 और 12 का चतुर्थानुपाती ज्ञात करें। हल: स्थापित करें: 3 : 5 = 12 : x। क्रॉस-गुणा करें: x = (5 × 12) / 3 = 60 / 3 = 20। उत्तर: 20

- 4 और 8 का तृतीयानुपाती ज्ञात करें। हल: स्थापित करें: 4 : 8 = 8 : x। क्रॉस-गुणा करें: x = 8^2 / 4 = 64 / 4 = 16। उत्तर: 16
- 4 और 25 के बीच मध्यानुपाती ज्ञात करें। हल: स्थापित करें: 4 : x = x : 25। क्रॉस-गुणा करें: x^2 = 4 × 25 = 100, तो x = √100 = 10। उत्तर: 10
- 6, 9 और 18 का चतुर्थानुपाती ज्ञात करें। हल: स्थापित करें: 6 : 9 = 18 : x। क्रॉस-गुणा करें: x = (9 × 18) / 6 = 162 / 6 = 27। उत्तर: 27
- 6 और 12 का तृतीयानुपाती ज्ञात करें, और जांचें कि 6, 12 और आपका उत्तर एक गुणोत्तर श्रेणी बनाते हैं। हल: x = 12^2 / 6 = 144 / 6 = 24। GP के रूप में जांचें: 12/6 = 2, और 24/12 = 2 — दोनों बार वही सामान्य अनुपात, जो पुष्टि करता है कि 6, 12, 24 एक वास्तविक GP है। उत्तर: 24
- 4, x और 15 का चतुर्थानुपाती 30 है। x ज्ञात करें। हल: स्थापित करें: 4 : x = 15 : 30। क्रॉस-गुणा करें: 4 × 30 = 15 × x → 120 = 15x → x = 8। उत्तर: 8
- 5 और किसी संख्या N के बीच मध्यानुपाती 20 है। N ज्ञात करें। हल: स्थापित करें: 5 : 20 = 20 : N। क्रॉस-गुणा करें: 5N = 400, तो N = 80। जांच: 5 और 80 का मध्यानुपाती √(5 × 80) = √400 = 20 है। मेल खाता है। उत्तर: 80
- Practice: 5 और 10 का तृतीयानुपाती ज्ञात करें। (उत्तर: 20)
- Practice: 9 और 16 के बीच मध्यानुपाती ज्ञात करें। (उत्तर: 12)
- Practice: 2, 7 और 10 का चतुर्थानुपाती ज्ञात करें। (उत्तर: 35)
- Practice: 3 और 9 का तृतीयानुपाती ज्ञात करें, और जांचें कि 3, 9 और आपका उत्तर एक गुणोत्तर श्रेणी बनाते हैं। (उत्तर: 27। जांच: 9/3 = 3 और 27/9 = 3, वही अनुपात।)
- Practice: 5, y और 12 का चतुर्थानुपाती 36 है। y ज्ञात करें। (उत्तर: 15। 5:y = 12:36, तो 5×36 = 12y।)
- Practice: 8 और किसी संख्या N के बीच मध्यानुपाती 16 है। N ज्ञात करें। (उत्तर: 32। 8:16 = 16:N, तो N = 256/8।)
- Practice: 7 और 21 का तृतीयानुपाती ज्ञात करें। (उत्तर: 63। x = 21^2/7 = 441/7।)

> **त्वरित दोहराव:** a, b, c का चतुर्थानुपाती: x ज्ञात करें जहां a : b = c : x। क्रॉस-गुणा करने पर x = (b × c) / a मिलता है।; a, b का तृतीयानुपाती: x ज्ञात करें जहां a : b = b : x — ध्यान दें b दोहराया गया है। क्रॉस-गुणा करने पर x = b^2 / a मिलता है।; a और b के बीच मध्यानुपाती: x ज्ञात करें जहां a : x = x : b — इस बार x दोहराया गया है। क्रॉस-गुणा करने पर x^2 = a × b मिलता है, तो x = √(ab)।; इन तीनों को मिलाना आसान है क्योंकि इन सभी में तीन दी गई-या-निहित संख्याएं शामिल होती हैं — क्रॉस-गुणा करने से पहले अनुपात कथन को स्पष्ट रूप से लिखें, अज्ञात को उसके सही स्थान पर रखते हुए।; तीनों एक गुणोत्तर श्रेणी (GP) (लगातार पदों के बीच स्थिर अनुपात वाला क्रम) का वर्णन करते हैं: तृतीयानुपाती a, b, x को एक GP बनाता है; मध्यानुपाती a, x, b को एक GP बनाता है। यह पहचानना एक तेज़ जाँच देता है — लगातार पदों को भाग दें और देखें अनुपात हर बार वही है।; उलटे प्रश्न आपको स्वयं अनुपाती मान देते हैं और तीन मूल संख्याओं में से एक पूछते हैं — वही क्रॉस-गुणा किया समीकरण पुनर्व्यवस्थित करें ताकि अब जो चर अज्ञात है वह अलग हो जाए, सामान्य वाले के बजाय।; अपने उत्तर को वापस मूल अनुपात में एक वास्तविक अनुपात के रूप में रखकर जांचें (जैसे 3:5, सरल करने पर 12:20 के बराबर होना चाहिए) ताकि पुष्टि हो कि दोनों पक्ष वास्तव में मेल खाते हैं।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/ratio-proportion-applications/

साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज

साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

साधारण ब्याज Prt/100 होता है जब मूलधन P, वार्षिक प्रतिशत दर r और समय t वर्षों में समान इकाइयों का उपयोग करें, और राशि मूलधन + ब्याज के बराबर होती है। स्थिर दर पर वार्षिक चक्रवृद्धि के साथ, पूर्ण वर्षों के लिए राशि P(1 + r/100)^t होती है। बताई गई नाममात्र वार्षिक दर पर अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि, प्रति अर्धवर्ष उस दर की आधी और दोगुनी अवधि उपयोग करती है। बदलती चक्रवृद्धि दरें अपने व्यक्तिगत अवधि गुणकों को गुणा करती हैं, जबकि बदलती दरों पर साधारण ब्याज की गणना हमेशा अपरिवर्तित मूलधन पर की जाती है। प्रतिशत वृद्धि धनात्मक गुणकों का उपयोग करती है और मूल्यह्रास बरकरार अंशों का, तो स्पष्ट रूप से बताए जाने पर वही चक्रवृद्धि विधि लागू होती है।

ठीक 2 वर्षों के लिए, चक्रवृद्धि और साधारण ब्याज के बीच अंतर के लिए एक सीधा शॉर्टकट है: CI − SI = P × $(r/100)^2$ - यह इस तथ्य से आता है कि चक्रवृद्धि ब्याज दूसरे वर्ष में प्रभावी रूप से "पहले वर्ष के ब्याज पर ब्याज" कमाता है, जो साधारण ब्याज कभी नहीं करता। यह शॉर्टकट केवल 2 वर्षों के लिए काम करता है; लंबी अवधि के लिए पूर्ण चक्रवृद्धि सूत्र चाहिए।

ज्ञात साधारण ब्याज से अज्ञात दर या समय ज्ञात करने के लिए, उसी सूत्र को पुनर्व्यवस्थित करें: दर = (SI × 100)/(P × t), या समय = (SI × 100)/(P × r) - जो भी मात्रा अनुपस्थित हो, उसे वैसे ही अलग करें जैसे किसी रेखीय समीकरण में करते हैं।

उदाहरण

- ₹5500 पर 5% वार्षिक दर से 3 वर्षों का साधारण ब्याज रुपयों में ज्ञात करें। हल: साधारण ब्याज = मूलधन × वार्षिक दर × समय/100। तो SI = 5500 × 5 × 3/100 = ₹825।
- ₹11000 को 10% वार्षिक दर पर वार्षिक चक्रवृद्धि से निवेश किया जाता है। 2 वर्षों बाद राशि रुपयों में क्या है? हल: वर्ष 1 के बाद शेष ₹12100 है। फिर से 1.10 से गुणा करने पर ₹13310 मिलता है।
- ₹26000 मूल्य की एक मशीन हर वर्ष के अंत में अपने वर्तमान मूल्य का ठीक 10% खो देती है। 2 वर्षों बाद इसका मूल्य रुपयों में ज्ञात करें। हल: हर वर्ष पिछले मूल्य का 90% बरकरार रहता है। तो मूल्य = 26000 × 0.90^2 = ₹21060।

- ₹8000 पर 5% वार्षिक दर से 2 वर्षों के चक्रवृद्धि और साधारण ब्याज के बीच अंतर ज्ञात करें। हल: शॉर्टकट उपयोग करते हुए, CI−SI = P×(r/100)² = 8000×(0.05)² = 8000×0.0025 = ₹20। सीधे जांच: SI = 8000×5×2/100 = ₹800; CI = 8000×1.05²−8000 = ₹820; अंतर = ₹20, शॉर्टकट से मेल खाता है।
- ₹1500 की राशि 3 वर्षों में ₹450 साधारण ब्याज कमाती है। वार्षिक ब्याज दर ज्ञात करें। हल: दर = (SI×100)/(P×t) = (450×100)/(1500×3) = 45000/4500 = 10%।
- ₹10000 को 2 वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज पर निवेश किया जाता है, पहले वर्ष की दर 10% और दूसरे वर्ष की दर 20% है। अंतिम राशि ज्ञात करें। हल: चूंकि दरें वर्ष के अनुसार अलग हैं, व्यक्तिगत वर्ष गुणकों को गुणा करें: राशि = 10000 × 1.10 × 1.20 = ₹13200 - यह दोनों वर्षों के लिए 15% की एकल औसत दर उपयोग करने के समान नहीं है।

> **त्वरित दोहराव:** SI = Prt/100; CI राशि = P(1 + r/100)^t वार्षिक अवधि के लिए; अर्धवार्षिक में r/2 और 2t उपयोग करें; बदलती दरें अपने अवधि गुणकों को गुणा करती हैं (कभी औसत नहीं)। ठीक 2 वर्षों के लिए: CI−SI = P×(r/100)²। SI से दर या समय ज्ञात करना: दर=(SI×100)/(Pt) या समय= (SI×100)/(Pr) पुनर्व्यवस्थित करें।

साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज के प्रश्न हल सहित

ब्याज के सवालों में बस एक फर्क याद रखना होता है: साधारण ब्याज हर साल एक जैसा होता है, चक्रवृद्धि ब्याज अपने ऊपर ही बढ़ता है। इस पेज में दोनों सूत्र, अंतर निकालने के तेज़ तरीके, दर बदलने पर क्या होता है, और कई पूरी तरह हल किए गए उदाहरण दिए गए हैं। साधारण ब्याज (SI) = (P × R × T) / 100, जहां P मूलधन है, R वार्षिक दर है, T वर्षों में समय है। मिश्रधन = P + SI। चक्रवृद्धि ब्याज (CI), वार्षिक रूप से संयोजित: मिश्रधन = P × (1 + R/100)^T। CI = मिश्रधन − P। समान P, R और T (जब T > 1 हो) के लिए, CI हमेशा SI से अधिक होता है — बाद के वर्षों में ब्याज पर भी ब्याज मिलता है। जब T = 1 वर्ष हो, CI और SI बराबर होते हैं, क्योंकि अभी कोई संयोजन हुआ ही नहीं। 2 वर्षों के लिए शॉर्टकट: CI − SI = P × (R/100)²। 3 वर्षों के लिए: CI − SI = P × (R/100)² × (3 + R/100)। दोनों (1 + R/100)^T के विस्तार से निकलते हैं और केवल बताए गए वर्षों के लिए ही सही हैं। 2 वर्षों में चक्रवृद्धि, उसी प्रतिशत वृद्धि को दो बार लगाने जैसा है (प्रतिशत वाला पाठ देखें): 2 वर्षों में शुद्ध प्रतिशत वृद्धि 2R + R²/100 होती है, इसलिए 2 वर्षों का CI हमेशा (एक वर्ष के SI का दोगुना) से अधिक होता है। यदि दर हर साल बदलती है (जैसे पहले वर्ष 10%, दूसरे वर्ष 20%), तो एक सूत्र का उपयोग न करें — हर वर्ष के गुणक को गुणा करें: मिश्रधन = P × (1 + R_1/100) × (1 + R_2/100) × ... एक आम गलती है CI के आंकड़ों को SI के सूत्र में (या इसके विपरीत) डाल देना, क्योंकि प्रश्न केवल "ब्याज" कहता है — हमेशा "साधारण" या "चक्रवृद्धि" शब्द देखकर ही सूत्र चुनें। वर्ष के भिन्नात्मक भाग (जैसे 2 वर्ष 6 माह) के लिए, वार्षिक संयोजन में मानक परंपरा यह है: पूरे वर्षों के लिए CI निकालें, फिर बचे हुए भाग के लिए पूरे वर्षों के बाद मिली राशि पर साधारण ब्याज जोड़ें — भिन्नात्मक भाग पर चक्रवृद्धि नहीं, जब तक प्रश्न में कुछ और न कहा गया हो।

उदाहरण

- ₹5,000 पर 8% वार्षिक दर से 3 वर्षों का साधारण ब्याज ज्ञात करें। हल: SI = (P × R × T) / 100 = (5,000 × 8 × 3) / 100 = 1,200 उत्तर: ₹1,200
- ₹8,000 की राशि साधारण ब्याज पर 3 वर्षों में ₹9,440 हो जाती है। वार्षिक ब्याज दर ज्ञात करें। हल: SI = 9,440 − 8,000 = 1,440 R = (SI × 100) / (P × T) = (1,440 × 100) / (8,000 × 3) = 144,000 / 24,000 = 6% उत्तर: 6% वार्षिक
- ₹10,000 पर 2 वर्षों के लिए 10% वार्षिक दर से, वार्षिक रूप से संयोजित चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें। हल: मिश्रधन = 10,000 × (1.10)² = 10,000 × 1.21 = 12,100 CI = 12,100 − 10,000 = 2,100 उत्तर: ₹2,100
- ₹15,000 पर 2 वर्षों के लिए 10% वार्षिक दर पर चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज के बीच अंतर ज्ञात करें। हल: SI = (15,000 × 10 × 2) / 100 = 3,000 CI: मिश्रधन = 15,000 × (1.10)² = 15,000 × 1.21 = 18,150, अतः CI = 3,150 अंतर = 3,150 − 3,000 = 150 शॉर्टकट जांच: P × (R/100)² = 15,000 × 0.01 = 150 — मेल खाता है, केवल 2 वर्षों के लिए। उत्तर: ₹150
- ₹8,000 पर 3 वर्षों के लिए 5% वार्षिक दर पर चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज के बीच अंतर ज्ञात करें। हल: SI = (8,000 × 5 × 3) / 100 = 1,200 CI: मिश्रधन = 8,000 × (1.05)³ = 8,000 × 1.157625 = 9,261, अतः CI = 1,261 अंतर = 1,261 − 1,200 = 61 शॉर्टकट जांच: P × (R/100)² × (3 + R/100) = 8,000 × 0.0025 × 3.05 = 20 × 3.05 = 61 — मेल खाता है। उत्तर: ₹61
- 20% वार्षिक दर पर, वार्षिक रूप से संयोजित, एक राशि 2 वर्षों में ₹1,760 का चक्रवृद्धि ब्याज कमाती है। राशि ज्ञात करें। हल: 2 वर्षों में 20% पर गुणक (1.20)² = 1.44 है, इसलिए CI मूलधन का 0.44 भाग है। 0.44 × P = 1,760 P = 1,760 / 0.44 = 4,000 उत्तर: ₹4,000
- ₹5,000 को 2 वर्षों के लिए निवेश किया जाता है, पहले वर्ष दर 10% और दूसरे वर्ष 20%, वार्षिक रूप से संयोजित। चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें। हल: मिश्रधन = 5,000 × 1.10 × 1.20 (हर वर्ष का गुणक अलग से गुणा करें; दोनों दरों का औसत न लें) = 5,000 × 1.32 = 6,600 CI = 6,600 − 5,000 = 1,600 उत्तर: ₹1,600
- ₹12,000 पर 10% वार्षिक दर से 2 वर्ष 6 माह का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें, वार्षिक रूप से संयोजित। हल: पहले 2 पूरे वर्षों के बाद मिश्रधन = 12,000 × (1.10)² = 12,000 × 1.21 = 14,520। बचे हुए 6 माह (0.5 वर्ष) के लिए, इस राशि पर साधारण ब्याज जोड़ें: SI = 14,520 × 10 × 0.5 / 100 = 726। अंतिम राशि = 14,520 + 726 = 15,246। CI = 15,246 − 12,000 = 3,246। उत्तर: ₹3,246
- Practice: ₹12,000 पर 5% वार्षिक दर से 4 वर्षों का साधारण ब्याज ज्ञात करें। (उत्तर: ₹2,400। SI = (12,000 × 5 × 4)/100।)
- Practice: 5% वार्षिक साधारण ब्याज पर एक राशि 4 वर्षों में ₹6,600 हो जाती है। मूलधन ज्ञात करें। (उत्तर: ₹5,500। मिश्रधन = P(1 + 4×5/100) = 1.20P = 6,600।)

- Practice: ₹20,000 पर 2 वर्षों के लिए 5% वार्षिक दर से, वार्षिक रूप से संयोजित चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें। (उत्तर: ₹2,050। मिश्रधन = 20,000 × 1.05^2 = 22,050।)
- Practice: ₹4,000 पर 3 वर्षों के लिए 10% वार्षिक दर पर चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज के बीच अंतर ज्ञात करें। (उत्तर: ₹124। P(R/100)²(3+R/100) = 4,000 × 0.01 × 3.1 का उपयोग करें।)
- Practice: ₹1,600 की राशि 2 वर्षों में ₹900 का चक्रवृद्धि ब्याज कमाती है, वार्षिक रूप से संयोजित। ब्याज दर ज्ञात करें। (उत्तर: 25%। $(1 + R/100)^2 = 1 + 900/1,600 = 1.5625 = 1.25^2$, अतः R = 25।)
- Practice: ₹2,000 को 2 वर्षों के लिए निवेश किया जाता है, पहले वर्ष 25% और दूसरे वर्ष 10%, वार्षिक रूप से संयोजित। चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें। (उत्तर: ₹750। मिश्रधन = 2,000 × 1.25 × 1.10 = 2,750।)
- Practice: ₹10,000 पर 10% वार्षिक दर से 1 वर्ष 6 माह का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें (मानक भिन्नात्मक-वर्ष परंपरा का उपयोग करते हुए)। (उत्तर: ₹1,550। 1 वर्ष बाद मिश्रधन 11,000; 11,000 पर 0.5 वर्ष का SI 10% = 550; कुल CI = 1,000 + 550।)

त्वरित दोहराव: साधारण ब्याज (SI) = (P × R × T) / 100, जहां P मूलधन है, R वार्षिक दर है, T वर्षों में समय है। मिश्रधन = P + SI।; चक्रवृद्धि ब्याज (CI), वार्षिक रूप से संयोजित: मिश्रधन = P × (1 + R/100)^T। CI = मिश्रधन − P।; समान P, R और T (जब T > 1 हो) के लिए, CI हमेशा SI से अधिक होता है — बाद के वर्षों में ब्याज पर भी ब्याज मिलता है। जब T = 1 वर्ष हो, CI और SI बराबर होते हैं, क्योंकि अभी कोई संयोजन हुआ ही नहीं।; 2 वर्षों के लिए शॉर्टकट: CI − SI = P × $(R/100)^2$। 3 वर्षों के लिए: CI − SI = P × $(R/100)^2$ × (3 + R/100)। दोनों (1 + R/100)^T के विस्तार से निकलते हैं और केवल बताए गए वर्षों के लिए ही सही हैं।; 2 वर्षों में चक्रवृद्धि, उसी प्रतिशत वृद्धि को दो बार लगाने जैसा है (प्रतिशत वाला पाठ देखें): 2 वर्षों में शुद्ध प्रतिशत वृद्धि 2R + $R^2/100$ होती है, इसलिए 2 वर्षों का CI हमेशा (एक वर्ष के SI का दोगुना) से अधिक होता है।; यदि दर हर साल बदलती है (जैसे पहले वर्ष 10%, दूसरे वर्ष 20%), तो एक सूत्र का उपयोग न करें — हर वर्ष के गुणक को गुणा करें: मिश्रधन = P × $(1 + R_1/100)$ × $(1 + R_2/100)$ × ; एक आम गलती है CI के आंकड़ों को SI के सूत्र में (या इसके विपरीत) डाल देना, क्योंकि प्रश्न केवल "ब्याज" कहता है — हमेशा "साधारण" या "चक्रवृद्धि" शब्द देखकर ही सूत्र चुनें।; वर्ष के भिन्नात्मक भाग (जैसे 2 वर्ष 6 माह) के लिए, वार्षिक संयोजन में मानक परंपरा यह है: पूरे वर्षों के लिए CI निकालें, फिर बचे हुए भाग के लिए पूरे वर्षों के बाद मिली राशि पर साधारण ब्याज जोड़ें — भिन्नात्मक भाग पर चक्रवृद्धि नहीं, जब तक प्रश्न में कुछ और न कहा गया हो।

चक्रवृद्धि ब्याज: अर्धवार्षिक और त्रैमासिक चक्रवृद्धि के प्रश्न हल सहित

जब चक्रवृद्धि साल में एक बार से ज़्यादा होती है, तो चक्रवृद्धि ब्याज सूत्र नहीं बदलता — केवल दर और समय बदलते हैं, और उस समायोजन को सही करना ही इस विषय का पूरा कौशल है। इस पेज में यह समायोजन, अधिक बार चक्रवृद्धि होने से हमेशा थोड़ा अधिक मिलने का कारण, और उलटे प्रश्न (राशि देकर मूलधन या दर निकालना) शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के लिए: Amount = P × (1 + दर/100)^अवधियां लागू करने से पहले वार्षिक दर को 2 से भाग दें, और समय (वर्षों में) को 2 से गुणा करें। त्रैमासिक चक्रवृद्धि के लिए: वार्षिक दर को 4 से भाग दें, और समय (वर्षों में) को 4 से गुणा करें। मूल सूत्र कभी नहीं बदलता — केवल यह बदलता है कि "प्रति अवधि दर" और "अवधियों की संख्या" क्या मानी जाए। पहले इन दो संख्याओं को सही करें, फिर यह वार्षिक चक्रवृद्धि जैसी ही गणना है। चक्रवृद्धि ब्याज = राशि − मूलधन, बिल्कुल वार्षिक चक्रवृद्धि की तरह — दर/समय समायोजन पर ध्यान केंद्रित करने के बाद यह अंतिम चरण भूलना आसान है। समान मूलधन, वार्षिक दर और समय के लिए, अधिक बार चक्रवृद्धि होने से हमेशा थोड़ा अधिक ब्याज मिलता है: त्रैमासिक, अर्धवार्षिक से अधिक देता है, जो वार्षिक से अधिक देता है — क्योंकि छोटी अवधियों में ब्याज खुद पर पहले ब्याज कमाना शुरू कर देता है। उलटे प्रश्न (अंतिम राशि देकर मूलधन या दर निकालना) बिल्कुल वार्षिक चक्रवृद्धि की तरह काम करते हैं, बस पहले से समायोजित प्रति-अवधि दर और अवधियों की संख्या के साथ: मूलधन = राशि / (1 + दर/100)^अवधियां, या दर पाने के लिए राशि के गुणक की मानक घातों से तुलना करें।

उदाहरण

- ₹10,000 पर 1 वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर से, अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के साथ, चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें। हल: अर्धवार्षिक: प्रति अवधि दर = 10/2 = 5%, अवधियों की संख्या = 1 × 2 = 2। राशि = 10,000 × $(1.05)^2$ = 10,000 × 1.1025 = ₹11,025। चक्रवृद्धि ब्याज = 11,025 − 10,000 = ₹1,025। उत्तर: ₹1,025
- ₹10,000 पर 6 महीने के लिए 8% वार्षिक दर से, त्रैमासिक चक्रवृद्धि के साथ, राशि ज्ञात करें। हल: त्रैमासिक: प्रति अवधि दर = 8/4 = 2%। 6 महीने = 1/2 वर्ष, तो अवधियों की संख्या = (1/2) × 4 = 2। राशि = 10,000 × $(1.02)^2$ = 10,000 × 1.0404 = ₹10,404। उत्तर: ₹10,404
- ₹20,000 पर 1 वर्ष के लिए 20% वार्षिक दर से, अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के साथ, चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें। हल: अर्धवार्षिक: प्रति अवधि दर = 20/2 = 10%, अवधियों की संख्या = 1 × 2 = 2। राशि = 20,000 × $(1.10)^2$ = 20,000 × 1.21 = ₹24,200। चक्रवृद्धि ब्याज = 24,200 − 20,000 = ₹4,200। उत्तर: ₹4,200
- ₹15,000 पर 1.5 वर्ष के लिए 20% वार्षिक दर से, अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के साथ, चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें। हल: अर्धवार्षिक: प्रति अवधि दर = 20/2 = 10%। 1.5 वर्ष का मतलब है अवधियों की संख्या = 1.5 × 2 = 3। राशि = 15,000 × $(1.10)^3$ = 15,000 × 1.331 = ₹19,965। चक्रवृद्धि ब्याज = 19,965 − 15,000 = ₹4,965। उत्तर: ₹4,965
- ₹10,000 को 1 वर्ष के लिए 20% वार्षिक दर पर निवेश किया जाता है। वार्षिक बनाम अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि में मिलने वाले ब्याज की तुलना करें। हल: वार्षिक: राशि = 10,000 × 1.20 = ₹12,000, तो CI = ₹2,000। अर्धवार्षिक: 2 अवधियां, हर एक 10% पर। राशि = 10,000 × $(1.10)^2$ = 10,000 × 1.21 = ₹12,100, तो CI = ₹2,100। अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि ₹100 अधिक देती है, वही 20% वार्षिक दर होने पर भी — क्योंकि पहली छमाही का ब्याज दूसरी छमाही में अपने ऊपर ब्याज कमाना शुरू कर देता है। उत्तर: वार्षिक CI = ₹2,000; अर्धवार्षिक CI = ₹2,100 (₹100 अधिक)
- 10% वार्षिक दर पर अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के साथ निवेशित एक राशि, 1.5 वर्षों में ₹9,261 हो जाती है। राशि ज्ञात करें। हल: अर्धवार्षिक: प्रति अवधि दर = 5%, अवधियों की संख्या = 1.5 × 2 = 3। राशि गुणक = $(1.05)^3$ = 1.157625। मूलधन = राशि / गुणक = 9,261 / 1.157625 = ₹8,000। उत्तर: ₹8,000

- ₹20,000 की राशि, 6 महीने के लिए त्रैमासिक चक्रवृद्धि के साथ, ₹20,808 हो जाती है। वार्षिक ब्याज दर ज्ञात करें। हल: अवधियों की संख्या = (1/2) × 4 = 2। राशि गुणक = 20,808 / 20,000 = 1.0404। 1.0404 = $(1.02)^2$, तो प्रति अवधि दर = 2%। वार्षिक दर = 2% × 4 = 8%। उत्तर: 8% वार्षिक
- Practice: ₹12,000 पर 1 वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर से, अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के साथ, चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें। (उत्तर: ₹1,230)
- Practice: ₹20,000 पर 6 महीने के लिए 8% वार्षिक दर से, त्रैमासिक चक्रवृद्धि के साथ, राशि ज्ञात करें। (उत्तर: ₹20,808)
- Practice: ₹8,000 पर 1.5 वर्ष के लिए 20% वार्षिक दर से, अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के साथ, चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें। (उत्तर: ₹2,648)
- Practice: ₹15,000 को 1 वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर पर निवेश किया जाता है। वार्षिक बनाम अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के CI की तुलना करें। (उत्तर: वार्षिक CI = ₹1,500; अर्धवार्षिक CI = ₹1,537.50 (₹37.50 अधिक)।)
- Practice: 20% वार्षिक दर पर अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के साथ निवेशित एक राशि, 1 वर्ष में ₹24,200 हो जाती है। राशि ज्ञात करें। (उत्तर: ₹20,000। राशि गुणक = $(1.10)^2$ = 1.21; 24,200/1.21।)
- Practice: ₹12,000 की राशि, 1 वर्ष के लिए अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के साथ, ₹13,230 हो जाती है। वार्षिक ब्याज दर ज्ञात करें। (उत्तर: 10% वार्षिक। गुणक = 1.1025 = $(1.05)^2$, तो प्रति अवधि दर = 5%, वार्षिक = 10%।)
- Practice: ₹5,000 पर 1 वर्ष के लिए 40% वार्षिक दर से, अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के साथ, राशि ज्ञात करें। (उत्तर: ₹7,200। प्रति अवधि दर = 20%, अवधियां = 2; 5,000 × $(1.20)^2$ = 5,000 × 1.44।)

> **त्वरित दोहराव:** अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के लिए: Amount = P × (1 + दर/100)^अवधियां लागू करने से पहले वार्षिक दर को 2 से भाग दें, और समय (वर्षों में) को 2 से गुणा करें।; त्रैमासिक चक्रवृद्धि के लिए: वार्षिक दर को 4 से भाग दें, और समय (वर्षों में) को 4 से गुणा करें।; मूल सूत्र कभी नहीं बदलता — केवल यह बदलता है कि "प्रति अवधि दर" और "अवधियों की संख्या" क्या मानी जाए। पहले इन दो संख्याओं को सही करें, फिर यह वार्षिक चक्रवृद्धि जैसी ही गणना है।; चक्रवृद्धि ब्याज = राशि − मूलधन, बिल्कुल वार्षिक चक्रवृद्धि की तरह — दर/समय समायोजन पर ध्यान केंद्रित करने के बाद यह अंतिम चरण भूलना आसान है।; समान मूलधन, वार्षिक दर और समय के लिए, अधिक बार चक्रवृद्धि होने से हमेशा थोड़ा अधिक ब्याज मिलता है: त्रैमासिक, अर्धवार्षिक से अधिक देता है, जो वार्षिक से अधिक देता है — क्योंकि छोटी अवधियों में ब्याज खुद पर पहले ब्याज कमाना शुरू कर देता है।; उलटे प्रश्न (अंतिम राशि देकर मूलधन या दर निकालना) बिल्कुल वार्षिक चक्रवृद्धि की तरह काम करते हैं, बस पहले से समायोजित प्रति-अवधि दर और अवधियों की संख्या के साथ: मूलधन = राशि / (1 + दर/100)^अवधियां, या दर पाने के लिए राशि के गुणक की मानक घातों से तुलना करें।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/simple-compound-interest/

समय और कार्य

समय और कार्य — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

पूरे काम को एक इकाई मानें, तो जो कर्मचारी अकेले d दिनों में काम पूरा करता है, स्थिर कार्य-परिस्थितियों में उसकी दर 1/d काम प्रति दिन होती है। एक साथ स्वतंत्र काम के लिए दरें जोड़ें और भरने वाली दरों में से खाली करने वाले पाइप की दर घटाएं। बदलते कार्यबल या एकांतर-दिन वाले शेड्यूल को अलग-अलग अंतरालों में बांटें, शेष समय निकालने से पहले पूर्ण हुए अंशों को जोड़ें। दक्षता अनुपात दर अनुपात होते हैं, तो समान काम के लिए पूर्णता का समय दक्षता के विपरीत आनुपातिक होता है। जब मज़दूरी स्पष्ट रूप से किए गए काम के अनुपात में हो, तो उसे हर कर्मचारी की दर को वास्तविक कार्य-समय से गुणा करके बांटें।

कर्मचारियों की संख्या (समय नहीं) से संबंधित प्रश्नों के लिए, पुरुष-दिन स्थिरांक उपयोग करें: निश्चित मात्रा के काम के लिए, (कर्मचारियों की संख्या) × (दिनों की संख्या) स्थिर रहता है - यदि M1 कर्मचारी D1 दिन लेते हैं, तो M2 कर्मचारी D2 दिन लेंगे जहां M1×D1 = M2×D2। यह असल में वही "कुल काम = दर × समय" विचार है, बस एकल दर के बजाय कर्मचारियों की गिनती करता है।

मज़दूरी-बंटवारे के प्रश्न दरों की तुलना में सिमट जाते हैं, काम किए गए दिनों में नहीं: यदि दो लोग समान अवधि तक साथ काम करते हैं, तो कुल भुगतान में उनका हिस्सा उनकी व्यक्तिगत दरों (हर एक के लिए 1/d) के ठीक अनुपात में होता है, क्योंकि वे दोनों समान समय तक काम कर रहे हैं लेकिन हर एक जितना तेज़ है उसी अनुपात में काम का योगदान दे रहा है।

उदाहरण

- आशा अकेले एक स्थिर दर पर 11 दिनों में काम पूरा करती है। 3 दिनों में वह काम का कितना अंश पूरा करती है? हल: उसकी दैनिक दर काम का 1/11 है। 3 दिनों में वह 3 × 1/11 = 3/11 पूरा करती है। जांच: शेष 8 दिन 8/11 अंश के लिए जिम्मेदार हैं, और दोनों अंश जोड़कर 1 बनते हैं।
- आशा अकेले 8 कार्य-दिन और भरत 12 कार्य-दिन लेते हैं। वे एकांतर कार्य-दिनों पर काम करते हैं, पहले आशा, एक समय में एक व्यक्ति। काम पूरा होने में कितने कार्य-दिन लगेंगे (अंतिम आंशिक दिन को आनुपातिक गिनते हुए)? हल: हर दो-दिन चक्र में 1/8 + 1/12 = 5/24 काम पूरा होता है। 4 पूरे चक्रों के बाद, 1/6 शेष रहता है। उस शेष पर पहले आशा की दर लागू करें, फिर ज़रूरत हो तो भरत की; पूर्णता 9.5 कार्य-दिनों पर होती है।
- दो इनलेट अकेले एक टैंक को क्रमशः 12 और 6 घंटे में भरते हैं। एक आउटलेट अकेले इसे 24 घंटे में खाली करता है। स्थिर दरों के साथ, खाली टैंक पर तीनों खुले हैं। भरने का समय घंटों में ज्ञात करें। हल: शुद्ध दर = 1/12 + 1/6 − 1/24 = 5/24 टैंक/घंटा। एक टैंक का समय 4.8 घंटे है।
- यदि 6 आदमी एक दीवार को 10 दिनों में बना सकते हैं, तो इसे केवल 4 दिनों में पूरा करने के लिए कितने आदमी चाहिए (प्रति आदमी समान कार्य दर)? हल: M1×D1 = M2×D2 उपयोग करते हुए: 6×10 = M2×4, तो M2 = 60/4 = 15 आदमी।

- A एक काम 10 दिनों में और B 15 दिनों में पूरा कर सकता है। वे पूरे काम पर साथ काम करते हैं और उन्हें कुल ₹3000 मिलते हैं। पैसे कैसे बांटे जाने चाहिए? हल: दरें 1/10 और 1/15 हैं; संयुक्त दर = 1/6। संयुक्त दर में A का हिस्सा (1/10)/(1/6) = 3/5 है, तो A को 3/5 × 3000 = ₹1800 और B को शेष 2/5 × 3000 = ₹1200 मिलते हैं।
- A, B से दोगुना कुशल है। यदि B अकेले एक काम पूरा करने में 18 दिन लेता है, तो A अकेले कितना समय लेगा? हल: दक्षता और समय विपरीत संबंधित हैं, तो A (दोगुना कुशल) आधा समय लेगा: 18/2 = 9 दिन।
- A, B, और C अलग-अलग एक काम क्रमशः 20, 30, और 60 दिनों में पूरा कर सकते हैं। साथ काम करते हुए, वे कितने दिन लेंगे? हल: संयुक्त दर = 1/20 + 1/30 + 1/60 = 3/60 + 2/60 + 1/60 = 6/60 = 1/10, तो साथ में वे 10 दिनों में काम पूरा करेंगे।

> **त्वरित दोहराव:** काम = दर × समय; संयुक्त दरें जुड़ती हैं, खाली करने वाली दरें घटती हैं; हर कार्य-अंतराल को अलग से हिसाब में लें; मज़दूरी बताए जाने पर पूर्ण हुए काम के अनुसार बंटती है। कर्मचारी-संख्या प्रश्नों के लिए: M1×D1 = M2×D2 (पुरुष-दिन स्थिरांक)। समान अवधि साथ काम करने पर मज़दूरी हिस्सा व्यक्तिगत दरों के ठीक अनुपात में बंटता है।

समय और कार्य के प्रश्न हल सहित

समय और कार्य के सभी प्रश्न एक ही विचार पर टिके हैं: हर व्यक्ति के समय को दैनिक कार्य-दर में बदलें, दरों को मिलाएं, फिर वापस समय में बदलें। इस पेज में यह मुख्य विचार, पुरुष-दिन-कार्य की समानता, एकांतर-दिन और आधे रास्ते में छोड़ने वाले प्रश्न, और कई हल किए गए उदाहरण दिए गए हैं। यदि कोई व्यक्ति किसी कार्य को n दिनों में पूरा करता है, तो उसकी कार्य-दर प्रतिदिन कार्य का 1/n होती है। हर किसी को इस तरह दर में बदलना लगभग हर सवाल की कुंजी है। जब लोग साथ काम करते हैं, तो उनकी व्यक्तिगत दैनिक दरों को जोड़ें ताकि मिली-जुली दर मिले। साथ में कार्य पूरा करने का समय = 1 ÷ (मिली-जुली दर)। दो व्यक्तियों के लिए शॉर्टकट, A, x दिनों में और B, y दिनों में, शुरुआत से साथ काम करते हुए: मिला हुआ समय = xy / (x + y)। (यह बस दर-जोड़ के नियम को बीजगणितीय रूप से निकाला गया रूप है — सीधे याद रखने लायक।) "X% अधिक कुशल" का मतलब है प्रतिदिन X% अधिक कार्य, यानी दर को (1 + X/100) से गुणा किया जाता है — और चूंकि दर और समय एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं, समय को उसी गुणक से गुणा नहीं, भाग किया जाता है। समान कुल कार्य के लिए, पुरुष और दिन आपस में बदलते हैं: पुरुष$_1$ × दिन$_1$ = पुरुष$_2$ × दिन$_2$ (यदि प्रतिदिन काम के घंटे भी बदलें तो दोनों तरफ × घंटे जोड़ें)। अलग कार्य W के लिए, सामान्य रूप है (पुरुष × दिन × घंटे) / W = स्थिरांक। जब दो व्यक्ति एकांतर दिनों पर काम करते हैं, तो पहले एक पूरे चक्र (जैसे एक-एक दिन दोनों) में हुआ कार्य निकालें, देखें कि कार्य पूरा होने से पहले कितने पूरे चक्र समाते हैं, फिर बचे हुए दिन अलग से हल करें — यह न मानें कि एकांतर हमेशा बराबर बंट जाएगा, जब तक ऐसा वास्तव में न हो। जब कोई व्यक्ति बीच में काम छोड़ दे (या बीच में जुड़े), तो प्रश्न को चरणों में बांटें: जिस चरण में सभी मौजूद लोग साथ काम कर रहे थे उसमें हुआ कार्य निकालें, इसे 1 से घटाएं, फिर बचे चरण को बचे हुए व्यक्ति के साथ हल करें। जाँच: बहु-चरण प्रश्न हल करने के बाद, हर चरण का योगदान जोड़ें — यह ठीक 1 (एक पूरा कार्य) के बराबर होना चाहिए। यदि नहीं, तो किसी चरण की गणना गलत है।

उदाहरण

- A किसी कार्य को 12 दिनों में पूरा कर सकता है। 4 दिनों में वह कार्य का कितना हिस्सा पूरा करेगा? हल: A की दर = प्रतिदिन कार्य का 1/12। 4 दिनों में हुआ कार = 4 × (1/12) = 4/12 = 1/3 उत्तर: कार्य का 1/3 हिस्सा
- A किसी कार्य को 10 दिनों में और B उसी कार्य को 15 दिनों में पूरा कर सकता है। यदि वे साथ काम करें, तो वे इसे कितने दिनों में पूरा करेंगे? हल: A की दर = 1/10, B की दर = 1/15 प्रतिदिन। मिली-जुली दर = 1/10 + 1/15 = 3/30 + 2/30 = 5/30 = प्रतिदिन कार्य का 1/6। साथ में पूरा करने का समय = 1 ÷ (1/6) = 6 दिन। उत्तर: 6 दिन
- A किसी कार्य को 20 दिनों में कर सकता है। B, A से 25% अधिक कुशल है। B अकेले उसी कार्य को कितने दिनों में पूरा करेगा, ज्ञात करें। हल: "25% अधिक कुशल" का मतलब है B की कार्य-दर, A की दर की 1.25 गुना है। चूंकि समय दर के व्युत्क्रमानुपाती है, B का समय = A का समय ÷ 1.25 = 20 ÷ 1.25 = 16 दिन उत्तर: 16 दिन
- A और B साथ मिलकर किसी कार्य को 12 दिनों में पूरा कर सकते हैं। A अकेले इसे 20 दिनों में पूरा कर सकता है। B अकेले इस कार्य को कितने दिनों में पूरा करेगा? हल: मिली-जुली दर (A + B) = 1/12। A की दर = 1/20। B की दर = 1/12 − 1/20 = 5/60 − 3/60 = 2/60 = प्रतिदिन कार्य का 1/30। B का अकेले समय = 1 ÷ (1/30) = 30 दिन। उत्तर: 30 दिन
- 12 पुरुष एक दीवार को 15 दिनों में बना सकते हैं। समान दर पर, इसे 10 दिनों में बनाने के लिए कितने पुरुष चाहिए? हल: समान कुल कार्य के लिए, पुरुष × दिन स्थिर रहता है: 12 × 15 = 180। 10 दिनों के लिए: पुरुष = 180 / 10 = 18 पुरुष उत्तर: 18 पुरुष
- A किसी कार्य को 10 दिनों में और B को 15 दिनों में पूरा कर सकता है। वे एकांतर दिनों पर काम करते हैं, शुरुआत A से। कार्य कितने दिनों में पूरा होगा? हल: A की दर = 1/10, B की दर = 1/15। हर 2-दिन के चक्र (एक दिन A, एक दिन B) में हुआ कार्य = 1/10 + 1/15 = 3/30 + 2/30 = 5/30 = 1/6। 6 चक्रों (12 दिन) के बाद, हुआ कार्य = 6 × 1/6 = 1 — पूरा कार्य, बिना किसी बचे हुए दिन के विश्लेषण की आवश्यकता। तो कार्य ठीक 12 दिनों में पूरा होता है। उत्तर: 12 दिन
- A और B साथ मिलकर किसी कार्य को 12 दिनों में पूरा कर सकते हैं। वे 4 दिन साथ काम करते हैं, फिर A चला जाता है, और B अकेले बचा हुआ कार्य 16 और दिनों में पूरा करता है। B अकेले पूरे कार्य को कितने दिनों में पूरा कर सकता था? हल: मिली-जुली दर = 1/12। पहले 4 दिनों में हुआ कार्य = 4 × 1/12 = 1/3। बचा हुआ कार्य = 1 − 1/3 = 2/3, और B अकेले इसे 16 दिनों में पूरा करता है, तो B की दर = (2/3) / 16 = 1/24। B अकेले पूरे कार्य को 1 ÷ (1/24) = 24 दिनों में पूरा कर सकता था। उत्तर: 24 दिन
- Practice: A किसी कार्य को 8 दिनों में पूरा कर सकता है। 3 दिनों में वह कार्य का कितना हिस्सा पूरा करेगा? (उत्तर: कार्य का 3/8 हिस्सा।)
- Practice: A किसी कार्य को 6 दिनों में और B उसी कार्य को 12 दिनों में पूरा कर सकता है। साथ काम करते हुए, वे इसे कितने दिनों में पूरा करेंगे? (उत्तर: 4 दिन। मिली-जुली दर = 1/6 + 1/12 = 1/4।)

- Practice: A और B साथ मिलकर किसी कार्य को 15 दिनों में पूरा कर सकते हैं। B अकेले इसे 25 दिनों में पूरा कर सकता है। A अकेले इस कार्य को कितने दिनों में पूरा करेगा? (उत्तर: 37.5 दिन। A की दर = 1/15 − 1/25 = 2/75; समय = 75/2।)
- Practice: 15 पुरुष एक काम को 8 दिनों में पूरा करते हैं। समान दर पर, इसे 6 दिनों में पूरा करने के लिए कितने पुरुष चाहिए? (उत्तर: 20 पुरुष। पुरुष × दिन = 120 (स्थिरांक); 120/6 = 20।)
- Practice: A किसी कार्य को 8 दिनों में और B को 12 दिनों में पूरा कर सकता है। वे एकांतर दिनों पर काम करते हैं, शुरुआत A से। कार्य कितने दिनों में पूरा होगा? (उत्तर: 9.5 दिन। 4 पूरे चक्र (8 दिन) में 5/6 कार्य पूरा होता है; 9वां दिन (A) 1/8 जोड़ता है, शेष 1/24 रहता है; B इसे अपनी दर 1/12 प्रतिदिन से आधे दिन में पूरा करता है।)
- Practice: A और B साथ मिलकर किसी कार्य को 15 दिनों में पूरा कर सकते हैं। वे 5 दिन साथ काम करते हैं, फिर A चला जाता है और B अकेले बचा कार्य 20 और दिनों में पूरा करता है। B अकेले पूरे कार्य में कितना समय लेता, ज्ञात करें। (उत्तर: 30 दिन। साथ में 5 दिनों का कार्य = 1/3; बचा 2/3, B को 20 दिन लगते हैं, तो B की दर = 1/30।)
- Practice: A किसी कार्य को 18 दिनों में और B को 24 दिनों में पूरा कर सकता है। वे 8 दिन साथ काम करते हैं। कार्य का कितना हिस्सा बचा है? (उत्तर: 2/9। मिली-जुली दर = 1/18 + 1/24 = 7/72; 8 दिनों में हुआ कार्य = 56/72 = 7/9; बचा = 2/9।)

> **त्वरित दोहराव:** यदि कोई व्यक्ति किसी कार्य को n दिनों में पूरा करता है, तो उसकी कार्य-दर प्रतिदिन कार्य का 1/n होती है। हर किसी को इस तरह दर में बदलना लगभग हर सवाल की कुंजी है।; जब लोग साथ काम करते हैं, तो उनकी व्यक्तिगत दैनिक दरों को जोड़ें ताकि मिली-जुली दर मिले। साथ में कार्य पूरा करने का समय = 1 ÷ (मिली-जुली दर)।; दो व्यक्तियों के लिए शॉर्टकट, A, x दिनों में और B, y दिनों में, शुरुआत से साथ काम करते हुए: मिला हुआ समय = xy / (x + y)। (यह बस दर-जोड़ के नियम को बीजगणितीय रूप से निकाला गया रूप है — सीधे याद रखने लायक।); "X% अधिक कुशल" का मतलब है प्रतिदिन X% अधिक कार्य, यानी दर को (1 + X/100) से गुणा किया जाता है — और चूंकि दर और समय एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं, समय को उसी गुणक से गुणा नहीं, भाग किया जाता है।; समान कुल कार्य के लिए, पुरुष और दिन आपस में बदलते हैं: पुरुष$_1$ × दिन$_1$ = पुरुष$_2$ × दिन$_2$ (यदि प्रतिदिन काम के घंटे भी बदलें तो दोनों तरफ × घंटे जोड़ें)। अलग कार्य W के लिए, सामान्य रूप है (पुरुष × दिन × घंटे) / W = स्थिरांक।; जब दो व्यक्ति एकांतर दिनों पर काम करते हैं, तो पहले एक पूरे चक्र (जैसे एक-एक दिन दोनों) में हुआ कार्य निकालें, देखें कि कार्य पूरा होने से पहले कितने पूरे चक्र समाते हैं, फिर बचे हुए दिन अलग से हल करें — यह न मानें कि एकांतर हमेशा बराबर बंट जाएगा, जब तक ऐसा वास्तव में न हो।; जब कोई व्यक्ति बीच में काम छोड़ दे (या बीच में जुड़े), तो प्रश्न को चरणों में बांटें: जिस चरण में सभी मौजूद लोग साथ काम कर रहे थे उसमें हुआ कार्य निकालें, इसे 1 से घटाएं, फिर बचे चरण को बचे हुए व्यक्ति के साथ हल करें।; जाँच: बहु-चरण प्रश्न हल करने के बाद, हर चरण का योगदान जोड़ें — यह ठीक 1 (एक पूरा कार्य) के बराबर होना चाहिए। यदि नहीं, तो किसी चरण की गणना गलत है।

पाइप्स और सिस्टर्न्स के प्रश्न हल सहित

पाइप्स और सिस्टर्न्स, समय और कार्य का ही एक रूप है, बस एक मोड़ के साथ — एक आउटलेट पाइप टंकी भरने के बजाय खाली करता है, तो इसकी दर ऋणात्मक होती है। इस पेज में यह मुख्य विचार, उलटे प्रश्न (मिला हुआ समय देकर एक पाइप का अपना समय निकालना), देर से जुड़ना, और बीच में पाइप बंद होना शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। जो पाइप टंकी भरता है उसकी दर धनात्मक होती है (प्रति घंटा भरे गए टंकी का हिस्सा); जो पाइप खाली करता है (आउटलेट) उसकी दर ऋणात्मक होती है। दरों को बिल्कुल समय और कार्य की तरह जोड़ें, बस आउटलेट पाइप घटते हैं। यदि एक भरने वाला पाइप किसी टंकी को x घंटों में भर सकता है, तो उसकी दर 1/x है। यदि एक आउटलेट एक भरी हुई टंकी को y घंटों में खाली कर सकता है, तो उसकी दर −1/y है। एक साथ खुले कई पाइपों के लिए, शुद्ध दर पाने के लिए सभी दरों को जोड़ें (भरने वाले धनात्मक, खाली करने वाले ऋणात्मक)। भरने (या खाली करने) का समय = 1 ÷ |शुद्ध दर|, और चिह्न बताता है कि टंकी असल में किस दिशा में जा रही है। जो पाइप किसी दूसरे से "दोगुना तेज़" है उसका समय आधा होता है — यहां दर और समय एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं, ठीक समय और कार्य की तरह। उलटे प्रश्न (मिला हुआ समय देकर एक पाइप का अपना समय निकालना) सामान्य सेटअप को ही उलटा करते हैं: अज्ञात दर के लिए 1/x ± 1/y = 1/(मिला हुआ समय) को पुनर्व्यवस्थित करें, फिर उस पाइप का अपना समय पाने के लिए उसका व्युत्क्रम लें। यदि एक पाइप दूसरे के जुड़ने से पहले शुरू हो जाए, या कोई पाइप बीच में बंद हो जाए, तो प्रश्न को समय और कार्य की तरह चरणों में बांटें: हर चरण में भरी गई टंकी का अंश निकालें, चलते कुल को 1 से घटाएं, और अंतिम चरण को बचे हुए पाइप(ों) से हल करें।

उदाहरण

- पाइप A किसी टंकी को 6 घंटों में भर सकता है, और पाइप B उसी टंकी को 8 घंटों में भर सकता है। यदि दोनों पाइप एक साथ खोले जाएं, तो टंकी भरने में कितना समय लगेगा? हल: दर A = 1/6, दर B = 1/8। मिली-जुली दर = 1/6 + 1/8 = 4/24 + 3/24 = 7/24। समय = 1 ÷ (7/24) = 24/7 = 3 3/7 घंटे। उत्तर: 24/7 घंटे = 3 3/7 घंटे
- पाइप A किसी टंकी को 5 घंटों में भर सकता है, जबकि पाइप B (एक आउटलेट) भरी हुई टंकी को 10 घंटों में खाली कर सकता है। यदि दोनों पाइप एक साथ खोले जाएं, तो खाली टंकी भरने में कितना समय लगेगा? हल: दर A = 1/5, दर B = −1/10। मिली-जुली दर = 1/5 − 1/10 = 2/10 − 1/10 = 1/10। समय = 1 ÷ (1/10) = 10 घंटे। उत्तर: 10 घंटे
- दो पाइप किसी टंकी को क्रमशः 12 घंटों और 15 घंटों में भर सकते हैं। एक तीसरा आउटलेट पाइप भरी हुई टंकी को 20 घंटों में खाली कर सकता है। यदि तीनों एक साथ खोले जाएं, तो खाली टंकी भरने में कितना समय लगेगा? हल: दरें: 1/12, 1/15, और −1/20। 60 को उभयनिष्ठ हर मानते हुए: 5/60 + 4/60 − 3/60 = 6/60 = 1/10। समय = 1 ÷ (1/10) = 10 घंटे। उत्तर: 10 घंटे
- पाइप A किसी टंकी को 4 घंटों में भर सकता है। पाइप A, पाइप B से दोगुना तेज़ है। यदि दोनों पाइप साथ काम करें, तो टंकी भरने में उन्हें कितना समय लगेगा? हल: पाइप A की दर = 1/4। "A, B से दोगुना तेज़ है" का मतलब है A की दर, B की दर से दोगुनी है, तो B की दर = (1/4) ÷ 2 = 1/8 (B अकेले 8 घंटे लेगा)। मिली-जुली दर = 1/4 + 1/8 = 2/8 + 1/8 = 3/8। समय = 1 ÷ (3/8) = 8/3 = 2 2/3 घंटे। उत्तर: 8/3 घंटे = 2 2/3 घंटे

- पाइप A किसी टंकी को 6 घंटों में भर सकता है। जब पाइप A और एक आउटलेट पाइप B साथ खोले जाते हैं, टंकी 10 घंटों में भरती है। B अकेले भरी टंकी को खाली करने में कितना समय लेगा, ज्ञात करें। हल: B की अज्ञात दर के साथ मिली-जुली दर का समीकरण बनाएं: 1/6 − 1/y = 1/10। 1/y = 1/6 − 1/10 = 5/30 − 3/30 = 2/30 = 1/15। तो y = 15 घंटे। उत्तर: 15 घंटे
- पाइप A किसी टंकी को 12 घंटों में भर सकता है, और पाइप B इसे 15 घंटों में भर सकता है। पाइप A पहले खोला जाता है, और पाइप B 4 घंटे बाद जुड़ता है। टंकी भरने में लगा कुल समय ज्ञात करें। हल: पहले 4 घंटों में, केवल A काम करता है: यह 4 × (1/12) = 1/3 टंकी भरता है। शेष = 2/3। दोनों खुलने के बाद, मिली-जुली दर = 1/12 + 1/15 = 5/60 + 4/60 = 9/60 = 3/20। शेष 2/3 भरने का समय = (2/3) ÷ (3/20) = (2/3) × (20/3) = 40/9 घंटे। कुल समय = 4 + 40/9 = 36/9 + 40/9 = 76/9 ≈ 8.44 घंटे (लगभग 8 घंटे 27 मिनट)। उत्तर: 76/9 घंटे ≈ 8.44 घंटे
- पाइप A और B किसी टंकी को क्रमशः 15 और 20 घंटों में भर सकते हैं। दोनों साथ खोले जाते हैं, लेकिन 4 घंटे बाद पाइप A बंद कर दिया जाता है। टंकी भरने में लगा कुल समय ज्ञात करें। हल: पहले 4 घंटों की मिली-जुली दर = 1/15 + 1/20 = 4/60 + 3/60 = 7/60। 4 घंटों में भरा = 4 × 7/60 = 28/60 = 7/15। शेष = 8/15। इसके बाद केवल B काम करता है, दर 1/20 पर। बाकी के लिए समय = (8/15) ÷ (1/20) = (8/15) × 20 = 160/15 = 32/3 घंटे ≈ 10.67 घंटे। कुल समय = 4 + 32/3 = 12/3 + 32/3 = 44/3 ≈ 14.67 घंटे (लगभग 14 घंटे 40 मिनट)। उत्तर: 44/3 घंटे ≈ 14.67 घंटे
- Practice: पाइप A किसी टंकी को 10 घंटों में भर सकता है, और पाइप B उसी टंकी को 15 घंटों में भर सकता है। यदि दोनों एक साथ खोले जाएं, तो टंकी भरने में कितना समय लगेगा? (उत्तर: 6 घंटे। मिली-जुली दर = 1/10 + 1/15 = 1/6।)
- Practice: पाइप A किसी टंकी को 6 घंटों में भर सकता है, जबकि पाइप B (एक आउटलेट) भरी हुई टंकी को 9 घंटों में खाली कर सकता है। यदि दोनों एक साथ खोले जाएं, तो खाली टंकी भरने में कितना समय लगेगा? (उत्तर: 18 घंटे। मिली-जुली दर = 1/6 − 1/9 = 1/18।)
- Practice: पाइप A किसी टंकी को 12 घंटों में भर सकता है। पाइप A, पाइप B से 3 गुना तेज़ है। यदि दोनों साथ काम करें, तो टंकी भरने में उन्हें कितना समय लगेगा? (उत्तर: 9 घंटे। B की दर = 1/36; मिली-जुली = 1/12 + 1/36 = 1/9।)
- Practice: पाइप A किसी टंकी को 8 घंटों में भर सकता है। जब पाइप A और एक आउटलेट पाइप B साथ खोले जाते हैं, टंकी 24 घंटों में भरती है। B अकेले टंकी खाली करने में कितना समय लेगा? (उत्तर: 12 घंटे। 1/y = 1/8 − 1/24 = 1/12।)
- Practice: पाइप A किसी टंकी को 12 घंटों में भर सकता है, और पाइप B इसे 18 घंटों में भर सकता है। पाइप A पहले खोला जाता है, और पाइप B 3 घंटे बाद जुड़ता है। टंकी भरने में कुल समय ज्ञात करें। (उत्तर: 8.4 घंटे। पहले 3 घंटे में 1/4 भरता है; शेष 3/4, मिली-जुली दर 5/36 पर 5.4 घंटे लेता है; कुल 3+5.4।)
- Practice: पाइप A और B किसी टंकी को क्रमशः 12 और 24 घंटों में भर सकते हैं। दोनों साथ खोले जाते हैं, लेकिन 4 घंटे बाद पाइप A बंद कर दिया जाता है। टंकी भरने में कुल समय ज्ञात करें। (उत्तर: 16 घंटे। पहले 4 घंटे (मिली-जुली दर 1/8) में 1/2 भरता है; शेष 1/2, B की दर 1/24 पर 12 घंटे लेता है; कुल 4+12।)
- Practice: एक टंकी पाइप A से 9 घंटों में भरती है। पाइप A, पाइप B से 1.5 गुना तेज़ है। यदि दोनों साथ काम करें, तो टंकी भरने में उन्हें कितना समय लगेगा? (उत्तर: 5.4 घंटे। B की दर = (1/9)/1.5 = 2/27; मिली-जुली = 3/27+2/27 = 5/27; समय = 27/5।)

> **त्वरित दोहराव:** जो पाइप टंकी भरता है उसकी दर धनात्मक होती है (प्रति घंटा भरे गए टंकी का हिस्सा); जो पाइप खाली करता है (आउटलेट) उसकी दर ऋणात्मक होती है। दरों को बिल्कुल समय और कार्य की तरह जोड़ें, बस आउटलेट पाइप घटते हैं।; यदि एक भरने वाला पाइप किसी टंकी को x घंटों में भर सकता है, तो उसकी दर 1/x है। यदि एक आउटलेट एक भरी हुई टंकी को y घंटों में खाली कर सकता है, तो उसकी दर −1/y है।; एक साथ खुले कई पाइपों के लिए, शुद्ध दर पाने के लिए सभी दरों को जोड़ें (भरने वाले धनात्मक, खाली करने वाले ऋणात्मक)। भरने (या खाली करने) का समय = 1 ÷ |शुद्ध दर|, और चिह्न बताता है कि टंकी असल में किस दिशा में जा रही है।; जो पाइप किसी दूसरे से "दोगुना तेज़" है उसका समय आधा होता है — यहां दर और समय एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं, ठीक समय और कार्य की तरह।; उलटे प्रश्न (मिला हुआ समय देकर एक पाइप का अपना समय निकालना) सामान्य सेटअप को ही उलटा करते हैं: अज्ञात दर के लिए 1/x ± 1/y = 1/(मिला हुआ समय) को पुनर्व्यवस्थित करें, फिर उस पाइप का अपना समय पाने के लिए उसका व्युत्क्रम लें।; यदि एक पाइप दूसरे के जुड़ने से पहले शुरू हो जाए, या कोई पाइप बीच में बंद हो जाए, तो प्रश्न को समय और कार्य की तरह चरणों में बांटें: हर चरण में भरी गई टंकी का अंश निकालें, चलते कुल को 1 से घटाएं, और अंतिम चरण को बचे हुए पाइप(ों) से हल करें।

कार्य और मज़दूरी (Work and Wages) के प्रश्न हल सहित

जब लोग एक साथ काम करते हैं और एक समूह के रूप में भुगतान पाते हैं, तो कुल मज़दूरी उसी अनुपात में बंटती है जितना वास्तव में हर व्यक्ति ने काम किया — जो, समान समय तक काम करने पर, उनकी व्यक्तिगत कार्य दरों (1/दिन) के अनुपात के बराबर है। इस पेज में यह नियम, जब लोग असमान दिनों तक काम करें तो क्या बदलता है, और उलटे प्रश्न शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। यदि सभी समान दिनों तक काम करते हैं, तो मज़दूरी उनकी व्यक्तिगत एक-दिन कार्य दरों (1/अकेले काम करने में लगने वाले दिन) के अनुपात में बंटती है — तेज़ काम करने वाले को बड़ा हिस्सा मिलता है। पहले हर व्यक्ति की एक-दिन कार्य दर (1/अकेले दिन) निकालें, उनके बीच अनुपात को सरल करें, और तभी कुल मज़दूरी को उस अनुपात में बांटें। तीन या अधिक लोगों के लिए, जिसकी दर सीधे नहीं दी गई है उसे संयुक्त दर में से ज्ञात दरों को घटाकर निकाला जा सकता है — ठीक Time and Work की तरह। मज़दूरी का बड़ा हिस्सा हमेशा ज़्यादा दिन काम करने का मतलब नहीं रखता — इसका मतलब है ज़्यादा कार्य दर (तेज़ व्यक्तिगत पूर्णता समय), क्योंकि यहां सभी एक साथ समान दिनों तक काम करते हैं। ऊपर वाला "दर अनुपात से बांटें" नियम तभी लागू होता है जब सभी समान दिनों तक काम करें। यदि कोई दूसरे से कम दिन काम करे (देर से जुड़े, जल्दी छोड़ दे, या काम किए दिन सीधे अलग बताए गए हों), तो मज़दूरी वास्तविक किए गए काम से बांटनी होगी — हर व्यक्ति की दर × उसने वास्तव में जितने दिन काम किया — केवल एक-दिन दरों से नहीं। इसके लिए, हर व्यक्ति के पूरे काम का वास्तविक अंश निकालें (दर × उनके अपने काम किए दिन), पुष्टि करें कि ये अंश मिलकर पूरा काम (1) बनते हैं, और इन्हीं अंशों को — केवल दरों को नहीं — मज़दूरी-बंटवारे के अनुपात के रूप में उपयोग करें।

उदाहरण

- A एक काम 10 दिनों में पूरा कर सकता है और B वही काम 15 दिनों में पूरा कर सकता है। वे मिलकर काम पूरा करते हैं और कुल ₹3000 कमाते हैं। A का हिस्सा ज्ञात करें। हल: A की एक-दिन दर = 1/10, B की = 1/15। अनुपात A : B = 1/10 : 1/15 = 15 : 10 = 3 : 2 (दोनों को 30 से गुणा करने पर)। A का हिस्सा = 3/5 × ₹3000 = ₹1800। उत्तर: ₹1800
- उसी डेटा का उपयोग करते हुए (A 10 दिनों में, B 15 दिनों में, कुल मज़दूरी ₹3000), B का हिस्सा ज्ञात करें। हल: उसी 3 : 2 अनुपात से, B का हिस्सा = 2/5 × ₹3000 = ₹1200। उत्तर: ₹1200
- A, B और C मिलकर एक काम 6 दिनों में पूरा कर सकते हैं। A अकेला इसे 12 दिनों में, और B अकेला 18 दिनों में पूरा कर सकता है। मिलकर काम करने पर, वे ₹1800 कमाते हैं। C का हिस्सा ज्ञात करें। हल: संयुक्त दर = 1/6। A की दर = 1/12, B की दर = 1/18। C की दर = 1/6 − 1/12 − 1/18। 36 के उभयनिष्ठ हर का उपयोग करते हुए: 6/36 − 3/36 − 2/36 = 1/36। अनुपात A : B : C = 3/36 : 2/36 : 1/36 = 3 : 2 : 1, कुल 6 भाग। C का हिस्सा = 1/6 × ₹1800 = ₹300। उत्तर: ₹300
- A और B मिलकर एक काम 12 दिनों में पूरा कर सकते हैं। A अकेला इसे 20 दिनों में पूरा कर सकता है। मिलकर काम करने पर, वे ₹2400 कमाते हैं। B का हिस्सा ज्ञात करें। हल: संयुक्त दर = 1/12, A की दर = 1/20। B की दर = 1/12 − 1/20। 60 के उभयनिष्ठ हर का उपयोग करते हुए: 5/60 − 3/60 = 2/60। अनुपात A : B = 3/60 : 2/60 = 3 : 2, कुल 5 भाग। B का हिस्सा = 2/5 × ₹2400 = ₹960। उत्तर: ₹960
- A एक काम 10 दिनों में और B 15 दिनों में पूरा कर सकता है। A इस काम पर 4 दिन काम करता है और B 9 दिन (ज़रूरी नहीं कि एक साथ), और मिलकर वे काम ठीक पूरा कर देते हैं। यदि कुल मज़दूरी ₹2000 है, तो वास्तविक किए काम के आधार पर हर व्यक्ति का हिस्सा ज्ञात करें। हल: A का वास्तविक काम = 4 × (1/10) = 2/5। B का वास्तविक काम = 9 × (1/15) = 3/5। जांच: 2/5 + 3/5 = 1, पूरा काम — सही है। चूंकि किए दिन असमान हैं, वास्तविक काम से बांटें, केवल दरों से नहीं: अनुपात = 2/5 : 3/5 = 2 : 3। A का हिस्सा = (2/5) × 2,000 = ₹800। B का हिस्सा = (3/5) × 2,000 = ₹1,200। उत्तर: A = ₹800, B = ₹1,200
- A और B मिलकर एक काम 12 दिनों में पूरा कर सकते हैं। वे 4 दिन साथ काम करते हैं, फिर A चला जाता है और B अकेला बचा काम 16 और दिनों में पूरा करता है। यदि पूरे काम की मज़दूरी ₹4,800 है, तो वास्तविक किए काम के आधार पर हर व्यक्ति का हिस्सा ज्ञात करें। हल: संयुक्त दर = 1/12। पहले 4 दिनों में हुआ काम = 4/12 = 1/3, तो बचा काम = 2/3। B अकेला 2/3 को 16 दिनों में पूरा करता है, तो B की दर = (2/3)/16 = 1/24। फिर A की दर = 1/12 − 1/24 = 1/24 (इस मामले में B के बराबर)। पहले 4 दिनों में, A ने 4 × 1/24 = 1/6 और B ने भी 4 × 1/24 = 1/6 किया। फिर B ने अकेले 2/3 और किया। B का कुल = 1/6 + 2/3 = 5/6। A का कुल = 1/6। (जांच: 1/6 + 5/6 = 1।) मज़दूरी अनुपात A : B = 1/6 : 5/6 = 1 : 5। A का हिस्सा = (1/6) × 4,800 = ₹800। B का हिस्सा = (5/6) × 4,800 = ₹4,000। उत्तर: A = ₹800, B = ₹4,000
- A और B, समान दिनों तक साथ काम करते हुए, 3 : 2 के अनुपात में बंटी मज़दूरी कमाते हैं। यदि B अकेला काम 20 दिनों में पूरा कर सकता है, तो A अकेला इसे कितने दिनों में पूरा करेगा? हल: चूंकि समान दिन काम करने पर मज़दूरी अनुपात = दर अनुपात: दर A : दर B = 3 : 2। दर B = 1/20, तो दर A = (3/2) × (1/20) = 3/40। A का अकेला समय = 1 / (3/40) = 40/3 ≈ 13.3 दिन। उत्तर: 40/3 दिन ≈ 13.3 दिन
- Practice: A एक काम 8 दिनों में पूरा कर सकता है और B इसे 12 दिनों में पूरा कर सकता है। वे मिलकर काम करते हैं और कुल ₹2000 कमाते हैं। A का हिस्सा ज्ञात करें। (उत्तर: ₹1200)
- Practice: उसी डेटा का उपयोग करते हुए (A 8 दिनों में, B 12 दिनों में, कुल मज़दूरी ₹2000), B का हिस्सा ज्ञात करें। (उत्तर: ₹800)
- Practice: A, B और C मिलकर एक काम 4 दिनों में पूरा कर सकते हैं। A अकेला 10 दिन और B अकेला 15 दिन लेता है। यदि वे मिलकर ₹1200 कमाते हैं, तो C का हिस्सा ज्ञात करें। (उत्तर: ₹400)
- Practice: A एक काम 12 दिनों में और B 8 दिनों में पूरा कर सकता है। A 3 दिन और B 6 दिन काम करता है, जिससे काम ठीक पूरा हो जाता है। यदि कुल मज़दूरी ₹1,400 है, तो हर व्यक्ति का हिस्सा ज्ञात करें। (उत्तर: A = ₹350, B = ₹1,050। A का काम = 3/12 = 1/4; B का काम = 6/8 = 3/4; अनुपात 1:3।)
- Practice: A और B मिलकर एक काम 15 दिनों में पूरा कर सकते हैं। वे 5 दिन साथ काम करते हैं, फिर A चला जाता है और B अकेला बचा काम 20 और दिनों में पूरा करता है। यदि कुल मज़दूरी ₹3,000 है, तो हर व्यक्ति का हिस्सा ज्ञात करें। (उत्तर: A = ₹500, B = ₹2,500। संयुक्त दर 1/15; दोनों की अपनी दर बराबर 1/30 निकलती है; A का कुल काम 1/6, B का 5/6।)
- Practice: A और B, समान दिनों तक साथ काम करते हुए, 2 : 3 के अनुपात में बंटी मज़दूरी कमाते हैं। यदि A अकेला काम 15 दिनों में पूरा कर सकता है, तो B अकेला इसे कितने दिनों में पूरा करेगा? (उत्तर: 10 दिन। दर A = 1/15; दर B = (3/2) × (1/15) = 1/10।)
- Practice: A, B और C मिलकर एक काम 8 दिनों में पूरा कर सकते हैं। A अकेला 20 दिन और B अकेला 24 दिन लेता है। यदि वे मिलकर ₹1,440 कमाते हैं, तो C का हिस्सा ज्ञात करें। (उत्तर: ₹384। C की दर = 1/8−1/20−1/24 = 1/30; अनुपात A:B:C = 6:5:4; C का हिस्सा = (4/15)×1,440।)

त्वरित दोहराव: यदि सभी समान दिनों तक काम करते हैं, तो मज़दूरी उनकी व्यक्तिगत एक-दिन कार्य दरों (1/अकेले काम करने में लगने वाले दिन) के अनुपात में बंटती है — तेज़ काम करने वाले को बड़ा हिस्सा मिलता है।; पहले हर व्यक्ति की एक-दिन कार्य दर (1/अकेले दिन) निकालें, उनके बीच अनुपात को सरल करें, और तभी कुल मज़दूरी को उस अनुपात में बांटें।; तीन या अधिक लोगों के लिए, जिसकी दर सीधे नहीं दी गई है उसे संयुक्त दर में से ज्ञात दरों को घटाकर निकाला जा सकता है — ठीक Time and Work की तरह।; मज़दूरी का बड़ा हिस्सा हमेशा ज़्यादा दिन काम करने का मतलब नहीं रखता — इसका मतलब है ज़्यादा कार्य दर (तेज़ व्यक्तिगत पूर्णता समय), क्योंकि यहां सभी एक साथ समान दिनों तक काम करते हैं।; ऊपर वाला "दर अनुपात से बांटें" नियम तभी लागू होता है जब सभी समान दिनों तक काम करें। यदि कोई दूसरे से कम दिन काम करे (देर से जुड़े, जल्दी छोड़ दे, या काम किए दिन सीधे अलग बताए गए हों), तो मज़दूरी वास्तविक किए गए काम से बांटनी होगी — हर व्यक्ति की दर × उसने वास्तव में जितने दिन काम किया — केवल एक-दिन दरों से नहीं।; इसके लिए, हर व्यक्ति के पूरे काम का वास्तविक अंश निकालें (दर × उनके अपने काम किए दिन), पुष्टि करें कि ये अंश मिलकर पूरा काम (1) बनते हैं, और इन्हीं अंशों को — केवल दरों को नहीं — मज़दूरी-बंटवारे के अनुपात के रूप में उपयोग करें।

चाल, समय और दूरी

समय, चाल और दूरी — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

जब चाल स्थिर हो, तो दूरी = चाल × समय, पूरे प्रश्न में एक समान इकाइयों के साथ। km/h को m/s में बदलने के लिए 5/18 से गुणा करें और उल्टा बदलाव 18/5 से करें। औसत चाल = कुल दूरी / कुल समय, जो समान दूरी के लिए u और v चाल पर 2uv/(u + v) देती है। सापेक्ष चाल विपरीत दिशाओं के लिए योग और समान दिशा के लिए धनात्मक अंतर होती है। ट्रेनों के लिए उस कुल लंबाई का उपयोग करें जो वस्तु को पार करने के लिए चाहिए, नावों के लिए शांत-पानी और धारा की चाल जोड़ें, और दौड़ या वृत्ताकार ट्रैक के लिए स्पष्ट रूप से उस दूरी के अंतर की पहचान करें जिसे सापेक्ष गति को बंद करना है।

किसी वस्तु को पार करने वाली ट्रेनों को ट्रेन की पूरी लंबाई जोड़नी होती है जो वे पार कर रही हैं: किसी स्थिर बिंदु वस्तु (एक आदमी, एक खंभा) को पार करने में केवल ट्रेन की अपनी लंबाई चाहिए, लेकिन प्लेटफॉर्म या पुल पार करने में ट्रेन की लंबाई + प्लेटफॉर्म/पुल की लंबाई चाहिए, क्योंकि ट्रेन तब तक प्लेटफॉर्म से "साफ़" नहीं होती जब तक उसकी आखिरी बोगी दूर के छोर को पार न कर ले।

जब दो ट्रेनें एक-दूसरे को पार करती हैं, तो प्रासंगिक चाल उनकी सापेक्ष चाल है (विपरीत दिशा में हों तो योग, समान दिशा में हों तो अंतर, जैसा किसी भी सापेक्ष-गति प्रश्न में होता है) और प्रासंगिक दूरी दोनों ट्रेनों की लंबाई का योग है, क्योंकि दोनों ट्रेनों को एक-दूसरे से पूरी तरह साफ़ होना है।

"A, B को दौड़ में X मीटर की बढ़त देता है" जैसी बढ़त वाली दौड़ के लिए, धावकों की चाल का अनुपात D : (D − X) होता है — जितने समय में A पूरी दूरी D तय करता है, उतने समय में B को बराबरी के लिए केवल D − X तय करना होता है, तो उनकी चाल उसी अनुपात में होती है।

उदाहरण

- 54 km/h को m/s में बदलें। 1 km = 1000 m और 1 घंटा = 3600 सेकंड उपयोग करें। हल: 54 km/h = 54 × 1000/3600 m/s। गुणक को 5/18 में सरल करने पर 15 m/s मिलता है। जांच: 15 को 3.6 से गुणा करने पर 54 km/h वापस मिलता है।
- दो वाहन एक साथ 276 km दूरी से एक-दूसरे की ओर 41 और 51 km/h की चाल से चलना शुरू करते हैं। मिलने का समय घंटों में ज्ञात करें। हल: अंतर 41 + 51 = 92 km/h से बंद होता है। समय = 276/92 = 3 घंटे। जांच: 3 घंटे में उनकी दूरियां 123 और 153 km हैं, जो शुरुआती अंतर 276 के बराबर जुड़ती हैं।
- 440 m के वृत्ताकार ट्रैक पर दो धावक एक ही बिंदु से एक साथ शुरू होते हैं। वे एक ही दिशा में क्रमशः 6 और 4 m/s की स्थिर चाल से दौड़ते हैं। वे अगली बार कितने सेकंड बाद मिलेंगे? हल: तेज़ धावक को पूरा एक चक्कर 440 m अधिक लगाना होगा। सापेक्ष चाल 6 − 4 = 2 m/s है, तो समय 440/2 = 220 सेकंड है।
- 150 m लंबी एक ट्रेन 72 km/h पर 250 m लंबे प्लेटफॉर्म को पार करती है। लगा समय ज्ञात करें। हल: 72 km/h = 20 m/s; पार करने की कुल दूरी = 150 + 250 = 400 m; समय = 400/20 = 20 सेकंड।
- 120 m लंबी एक ट्रेन एक खड़े आदमी को 8 सेकंड में पार करती है। ट्रेन की चाल km/h में ज्ञात करें। हल: चाल = 120/8 = 15 m/s = 15 × 18/5 = 54 km/h — बिंदु वस्तु पार करते समय केवल ट्रेन की अपनी लंबाई मायने रखती है।
- 100 m और 150 m लंबी दो ट्रेनें विपरीत दिशाओं में क्रमशः 54 km/h और 36 km/h पर चलती हैं। उन्हें एक-दूसरे को पार करने में लगा समय ज्ञात करें। हल: सापेक्ष चाल = (54+36) km/h = 90 km/h = 25 m/s; कुल लंबाई = 250 m; समय = 250/25 = 10 सेकंड।
- 72 km/h पर चल रही 100 m लंबी ट्रेन, उसी दिशा में 54 km/h पर चल रही 150 m लंबी ट्रेन को पीछे छोड़ती है। पार करने का समय ज्ञात करें। हल: सापेक्ष चाल = (72−54) km/h = 18 km/h = 5 m/s; कुल लंबाई = 250 m; समय = 250/5 = 50 सेकंड।
- 100 m की दौड़ में, A, B को 20 m की बढ़त देता है और वे एक साथ फिनिश करते हैं। उनकी चाल का अनुपात ज्ञात करें। हल: चाल अनुपात A:B = 100 : (100−20) = 100:80 = 5:4, क्योंकि जितने समय में A 100 m दौड़ता है, उतने समय में B को बराबरी के लिए केवल 80 m दौड़ना होता है।

> **त्वरित दोहराव:** दूरी = चाल × समय; 1 m/s = 18/5 km/h; औसत चाल = कुल दूरी/कुल समय; मिलने और पार करने के लिए सापेक्ष चाल (विपरीत दिशा में योग, समान दिशा में अंतर) उपयोग करें। बिंदु वस्तु पार करने में केवल ट्रेन की अपनी लंबाई; प्लेटफॉर्म/पुल या दूसरी ट्रेन पार करने में दोनों लंबाई जोड़ें। दौड़ में बढ़त अनुपात = पूरी दूरी : (दूरी − बढ़त)।

चाल, समय और दूरी के प्रश्न हल सहित

चाल, समय और दूरी इन परीक्षाओं में सबसे अधिक बार पूछे जाने वाले मात्रात्मक विषयों में से एक है — और यहां ज़्यादातर अंक कुछ दोहराई जाने वाली गलतियों से कटते हैं: इकाई बदलना भूलना, दो चालों का औसत गलत तरीके से निकालना, और विपरीत व समान दिशा की सापेक्ष चाल में गड्डमड्ड करना। इस पेज में मुख्य नियम, मिलन-बिंदु और ठहराव-समय के प्रकार, और कई हल किए गए उदाहरण दिए गए हैं। चाल = दूरी / समय। इसे पुनर्व्यवस्थित करें तो: दूरी = चाल × समय, और समय = दूरी / चाल। km/hr को m/s में बदलने के लिए 5/18 से गुणा करें। m/s को km/hr में बदलने के लिए 18/5 से गुणा करें। जब एक ही दूरी दो अलग-अलग चालों a और b पर तय की जाती है (जैसे, एक ही रास्ते से जाना और लौटना), तो पूरी यात्रा के लिए औसत चाल 2ab/(a + b) होती है, सीधा औसत (a + b)/2 नहीं। यहां (a + b)/2 का उपयोग करना इस विषय की सबसे आम गलती है — यह तभी सही उत्तर देता है जब हर चाल पर बिताया गया समय बराबर हो, दूरी नहीं। अलग-अलग दूरियों वाली यात्रा के लिए (जहां बराबर-दूरी वाला शॉर्टकट लागू नहीं होता), मूल परिभाषा पर लौटें: औसत चाल = कुल दूरी / कुल समय। यह हमेशा काम करता है, तब भी जब ऊपर वाला शॉर्टकट लागू नहीं होता। जब दो वस्तुएं एक-दूसरे की ओर चलती हैं, तो सापेक्ष चाल उनकी चालों का योग होती है; मिलने (या ट्रेनों के पार करने) का समय इस संयुक्त चाल से निकलता है। जब दो वस्तुएं एक ही दिशा में चलती हैं, तो सापेक्ष चाल उनकी चालों का अंतर होती है। मिलन-बिंदु के प्रश्न: यदि दो वस्तुएं एक साथ D दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से एक-दूसरे की ओर a और b चाल से चलती हैं, तो वे D/(a + b) समय बाद मिलती हैं, पहले बिंदु से a × D/(a + b) दूरी पर। ठहराव-समय के प्रश्न: यदि किसी ट्रेन की बिना रुके चाल s_1 है और

ठहराव सहित औसत चाल s_2 है, तो प्रति घंटे ठहराव में खोया समय = $(1 - s_2/s_1) \times 60$ मिनट होता है। एक ही गणना में इकाइयां एक समान रखें — बिना बदले km को मिनट के साथ, या m/s को घंटे के साथ मिलाना, सही विधि होने पर भी गलत उत्तर देने का आम कारण है।

उदाहरण

- एक कार 60 km/hr की स्थिर चाल से चलती है। 180 km की दूरी तय करने में उसे कितना समय लगेगा? हल: समय = दूरी / चाल = 180 / 60 = 3 घंटे उत्तर: 3 घंटे
- 72 km/hr की चाल को मीटर प्रति सेकंड में बदलें। हल: km/hr को m/s में बदलने के लिए 5/18 से गुणा करें। 72 × 5/18 = 360/18 = 20 m/s उत्तर: 20 m/s
- एक व्यक्ति शहर A से शहर B तक 40 km/hr की चाल से जाता है, और उसी रास्ते से B से A तक 60 km/hr की चाल से लौटता है। पूरी यात्रा के लिए उसकी औसत चाल ज्ञात करें। हल: दोनों तरफ दूरी बराबर है, इसलिए सीधा औसत (40 + 60)/2 = 50 km/hr यहां गलत है — यह शॉर्टकट तभी काम करता है जब हर चाल पर बिताया गया समय बराबर हो, दूरी नहीं। चाल a और b पर तय की गई दो बराबर दूरियों के लिए, औसत चाल = 2ab / (a + b) होती है। = (2 × 40 × 60) / (40 + 60) = 4,800 / 100 = 48 km/hr उत्तर: 48 km/hr
- एक व्यक्ति 30 km/hr पर 60 km चलता है, फिर 45 km/hr पर आगे 90 km चलता है। पूरी यात्रा के लिए उसकी औसत चाल ज्ञात करें। हल: दोनों दूरियां (60 km और 90 km) बराबर नहीं हैं, इसलिए 2ab/(a + b) शॉर्टकट यहां लागू नहीं होता — कुल दूरी / कुल समय का उपयोग करें। पहले भाग का समय = 60/30 = 2 घंटे। दूसरे भाग का समय = 90/45 = 2 घंटे। कुल दूरी = 60 + 90 = 150 km। कुल समय = 2 + 2 = 4 घंटे। औसत चाल = 150 / 4 = 37.5 km/hr। उत्तर: 37.5 km/hr
- दो ट्रेनें, 150 m और 100 m लंबी, समानांतर पटरियों पर विपरीत दिशाओं में क्रमशः 45 km/hr और 36 km/hr की चाल से चलती हैं। वे एक-दूसरे को पूरी तरह पार करने में कितना समय लेंगी? हल: विपरीत दिशाओं में चलते हुए, सापेक्ष चाल = चालों का योग = 45 + 36 = 81 km/hr। m/s में बदलें: 81 × 5/18 = 22.5 m/s। एक-दूसरे को पूरी तरह पार करने के लिए, उन्हें मिलकर दोनों ट्रेनों की लंबाई के योग के बराबर दूरी तय करनी होगी: 150 + 100 = 250 m। समय = दूरी / चाल = 250 / 22.5 = 100/9 ≈ 11.1 सेकंड। उत्तर: 100/9 सेकंड ≈ 11.1 सेकंड
- शहर A और B के बीच 300 km की दूरी है। A से एक कार 50 km/hr की चाल से B की ओर और उसी समय B से दूसरी कार 70 km/hr की चाल से A की ओर चलती है। वे कितने समय बाद मिलेंगी, और A से कितनी दूर? हल: एक-दूसरे की ओर चलते हुए, संयुक्त चाल = 50 + 70 = 120 km/hr। मिलने का समय = दूरी / संयुक्त चाल = 300 / 120 = 2.5 घंटे। A से दूरी = A से चलने वाली चाल × समय = 50 × 2.5 = 125 km। उत्तर: 2.5 घंटे बाद, A से 125 km दूर
- एक ट्रेन की बिना रुके चाल 60 km/hr है, और ठहराव सहित औसत चाल 45 km/hr है। ज्ञात करें कि प्रति घंटे ट्रेन कितने मिनट रुकती है। हल: ठहराव में खोया अंश = 1 − (औसत चाल / बिना रुके चाल) = 1 − 45/60 = 1 − 0.75 = 0.25। प्रति घंटे ठहराव समय = 0.25 × 60 मिनट = 15 मिनट उत्तर: प्रति घंटे 15 मिनट
- Practice: एक साइकिल चालक 6 घंटे में 150 km की दूरी तय करता है। उसकी चाल km/hr में ज्ञात करें। (उत्तर: 25 km/hr। चाल = 150/6।)
- Practice: 90 km/hr की चाल को मीटर प्रति सेकंड में बदलें। (उत्तर: 25 m/s। 90 × 5/18 = 25।)
- Practice: एक ट्रेन एक निश्चित दूरी 50 km/hr की चाल से तय करती है और उसी रास्ते से 75 km/hr की चाल से लौटती है। पूरी यात्रा के लिए इसकी औसत चाल ज्ञात करें। (उत्तर: 60 km/hr। 2ab/(a+b) = (2×50×75)/125 = 7,500/125।)
- Practice: एक व्यक्ति 4 km/hr पर 20 km चलता है और फिर 20 km/hr पर 60 km साइकिल चलाता है। पूरी यात्रा के लिए औसत चाल ज्ञात करें। (उत्तर: 10 km/hr। समय = 5 + 3 = 8 घंटे; कुल दूरी 80 km; 80/8।)
- Practice: दो साइकिल चालक 72 km दूर स्थित बिंदुओं से एक साथ एक-दूसरे की ओर 15 km/hr और 21 km/hr की चाल से चलते हैं। वे कितने समय बाद मिलेंगे? (उत्तर: 2 घंटे। 72/(15+21) = 72/36।)
- Practice: एक बस की बिना रुके चाल 50 km/hr है, और ठहराव सहित चाल 40 km/hr है। प्रति घंटे ठहराव समय ज्ञात करें। (उत्तर: 12 मिनट। (1 − 40/50) × 60 = 0.2 × 60।)
- Practice: दो ट्रेनें 120 m और 180 m लंबी, समान दिशा में 72 km/hr और 54 km/hr की चाल से चलती हैं। तेज़ ट्रेन को धीमी ट्रेन से पूरी तरह आगे निकलने में कितना समय लगेगा? (उत्तर: 60 सेकंड। सापेक्ष चाल = 72−54 = 18 km/hr = 5 m/s; दूरी = 120+180 = 300 m; समय = 300/5।)

त्वरित दोहराव: चाल = दूरी / समय। इसे पुनर्व्यवस्थित करें तो: दूरी = चाल × समय, और समय = दूरी / चाल।; km/hr को m/s में बदलने के लिए 5/18 से गुणा करें। m/s को km/hr में बदलने के लिए 18/5 से गुणा करें।; जब एक ही दूरी दो अलग-अलग चालों a और b पर तय की जाती है (जैसे, एक ही रास्ते से जाना और लौटना), तो पूरी यात्रा के लिए औसत चाल 2ab/(a + b) होती है, सीधा औसत (a + b)/2 नहीं। यहां (a + b)/2 का उपयोग करना इस विषय की सबसे आम गलती है — यह तभी सही उत्तर देता है जब हर चाल पर बिताया गया समय बराबर हो, दूरी नहीं।; अलग-अलग दूरियों वाली यात्रा के लिए (जहां बराबर-दूरी वाला शॉर्टकट लागू नहीं होता), मूल परिभाषा पर लौटें: औसत चाल = कुल दूरी / कुल समय। यह हमेशा काम करता है, तब भी जब ऊपर वाला शॉर्टकट लागू नहीं होता।; जब दो वस्तुएं एक-दूसरे की ओर चलती हैं, तो सापेक्ष चाल उनकी चालों का योग होती है; मिलने (या ट्रेनों के पार करने) का समय इस संयुक्त चाल से निकलता है। जब दो वस्तुएं एक ही दिशा में चलती हैं, तो सापेक्ष चाल उनकी चालों का अंतर होती है।; मिलन-बिंदु के प्रश्न: यदि दो वस्तुएं एक साथ D दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से एक-दूसरे की ओर a और b चाल से चलती हैं, तो वे D/(a + b) समय बाद मिलती हैं, पहले बिंदु से a × D/(a + b) दूरी पर।; ठहराव-समय के प्रश्न: यदि किसी ट्रेन की बिना रुके चाल s_1 है और ठहराव सहित औसत चाल s_2 है, तो प्रति घंटे ठहराव में खोया समय = $(1 - s_2/s_1) \times 60$ मिनट होता है।; एक ही गणना में इकाइयां एक समान रखें — बिना बदले km को मिनट के साथ, या m/s को घंटे के साथ मिलाना, सही विधि होने पर भी गलत उत्तर देने का आम कारण है।

ट्रेन से जुड़े प्रश्न हल सहित

ट्रेन के प्रश्न टाइम-स्पीड-डिस्टेंस ही हैं, बस एक अतिरिक्त पेंच के साथ: ट्रेन की खुद एक लंबाई होती है, तो "पार करने" का मतलब है उस लंबाई को भी तय करना — चाहे वह एक खंभा हो, एक प्लेटफ़ॉर्म हो, एक चलता हुआ व्यक्ति हो, या दूसरी ट्रेन। इस पेज में चारों मानक परिदृश्य, किसी भी दिशा में चलता व्यक्ति, और "मिलने के बाद आगे जाने" वाला अनुपात शॉर्टकट शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। एक स्थिर बिंदु (खंभा, स्थिर खड़ा आदमी, सिग्नल) को पार करने का मतलब है ट्रेन अपनी खुद की लंबाई के बराबर दूरी तय करती है — उस बिंदु को शून्य लंबाई वाला मानें। एक प्लेटफ़ॉर्म (या पुल) को पार करने का मतलब है ट्रेन अपनी खुद की लंबाई प्लस प्लेटफ़ॉर्म की लंबाई के बराबर दूरी तय करती है — पूरी ट्रेन को पूरे प्लेटफ़ॉर्म को पार करना होता है। दो ट्रेनों का एक-दूसरे को पार करना: सापेक्ष गति (विपरीत दिशाओं के लिए गति का योग, एक ही दिशा के लिए गति का अंतर) का उपयोग करें, और तय करने वाली दूरी दोनों ट्रेनों की लंबाई का योग होती है — वस्तुओं वाला वही नियम, बस अब दो लंबाइयों के साथ। यदि ट्रेन किसी चलते हुए (स्थिर नहीं) व्यक्ति को पार करती है, तो सापेक्ष गति का उपयोग ठीक दो ट्रेनों की तरह करें — विपरीत दिशाओं के लिए गति जोड़ें, एक ही दिशा के लिए घटाएं — लेकिन तय करने वाली दूरी अब भी बस ट्रेन की अपनी लंबाई है, क्योंकि व्यक्ति की कोई लंबाई नहीं जोड़नी है। "मिलने के बाद आगे जाने" वाले प्रश्न: यदि दो ट्रेनें एक-दूसरे की ओर चलना शुरू करती हैं और पार करने के बाद, दूसरी ट्रेन के शुरुआती स्टेशन तक पहुंचने में क्रमशः a और b घंटे लेती हैं, तो (ट्रेन 1 की गति) / (ट्रेन 2 की गति) = √(b/a) होता है। मीटर में लंबाई और सेकंड में समय के साथ काम करने से पहले हमेशा km/hr को m/s में बदलें (× 5/18) — इकाइयों को मिलाना यहां सबसे आम गलती है।

उदाहरण

- 180 मीटर लंबी एक ट्रेन 54 km/hr की गति से चल रही है। प्लेटफ़ॉर्म पर खड़े एक आदमी को पार करने में उसे कितना समय लगेगा? हल: गति को m/s में बदलें: 54 × 5/18 = 15 m/s। एक आदमी (एक बिंदु) को पार करने का मतलब है ट्रेन की अपनी लंबाई के बराबर दूरी तय करना: 180 मीटर। समय = दूरी / गति = 180 / 15 = 12 सेकंड। उत्तर: 12 सेकंड
- 150 मीटर लंबी एक ट्रेन 72 km/hr की गति से चलते हुए एक प्लेटफ़ॉर्म को 25 सेकंड में पार करती है। प्लेटफ़ॉर्म की लंबाई ज्ञात करें। हल: गति को m/s में बदलें: 72 × 5/18 = 20 m/s। 25 सेकंड में तय की गई दूरी = 20 × 25 = 500 मीटर। यह दूरी ट्रेन की लंबाई प्लस प्लेटफ़ॉर्म की लंबाई है, तो प्लेटफ़ॉर्म की लंबाई = 500 − 150 = 350 मीटर। उत्तर: 350 मीटर
- 120 मीटर और 180 मीटर लंबी दो ट्रेनें समानांतर पटरियों पर एक ही दिशा में क्रमशः 72 km/hr और 54 km/hr की गति से चलती हैं। तेज़ ट्रेन को धीमी ट्रेन को पूरी तरह पार करने में लगने वाला समय ज्ञात करें। हल: एक ही दिशा, तो सापेक्ष गति = गतियों का अंतर = 72 − 54 = 18 km/hr। m/s में बदलें: 18 × 5/18 = 5 m/s। तय करने वाली दूरी = दोनों लंबाइयों का योग = 120 + 180 = 300 मीटर। समय = दूरी / गति = 300 / 5 = 60 सेकंड। उत्तर: 60 सेकंड
- 140 मीटर और 160 मीटर लंबी दो ट्रेनें समानांतर पटरियों पर विपरीत दिशाओं में क्रमशः 60 km/hr और 48 km/hr की गति से चलती हैं। उन्हें एक-दूसरे को पार करने में लगने वाला समय ज्ञात करें। हल: विपरीत दिशाएं, तो सापेक्ष गति = गतियों का योग = 60 + 48 = 108 km/hr। m/s में बदलें: 108 × 5/18 = 30 m/s। तय करने वाली दूरी = दोनों लंबाइयों का योग = 140 + 160 = 300 मीटर। समय = दूरी / गति = 300 / 30 = 10 सेकंड। उत्तर: 10 सेकंड
- 200 मीटर लंबी एक ट्रेन 66 km/hr की गति से चल रही है। वह विपरीत दिशा में 6 km/hr की गति से चल रहे एक आदमी को पार करती है। उसे पार करने में लगने वाला समय ज्ञात करें। हल: विपरीत दिशाएं, तो सापेक्ष गति = 66 + 6 = 72 km/hr। m/s में बदलें: 72 × 5/18 = 20 m/s। तय करने वाली दूरी बस ट्रेन की लंबाई है (आदमी की कोई लंबाई नहीं): 200 मीटर। समय = 200 / 20 = 10 सेकंड। उत्तर: 10 सेकंड
- 150 मीटर लंबी एक ट्रेन 70 km/hr की गति से चलते हुए, समान दिशा में 10 km/hr की गति से चल रहे एक आदमी को पार करती है। उसे पार करने में लगने वाला समय ज्ञात करें। हल: एक ही दिशा, तो सापेक्ष गति = 70 − 10 = 60 km/hr। m/s में बदलें: 60 × 5/18 = 50/3 m/s। समय = दूरी / गति = 150 / (50/3) = 150 × 3/50 = 9 सेकंड। उत्तर: 9 सेकंड
- दो ट्रेनें एक साथ स्टेशन A और B से एक-दूसरे की ओर चलना शुरू करती हैं। एक-दूसरे को पार करने के बाद, वे क्रमशः स्टेशन B और A तक पहुंचने में 4 घंटे और 9 घंटे लेती हैं। उनकी गतियों का अनुपात ज्ञात करें। हल: शॉर्टकट का उपयोग करते हुए: A से चलने वाली ट्रेन की गति / B से चलने वाली ट्रेन की गति = √(b/a), जहां a = 4 (A-ट्रेन का बचा समय) और b = 9 (B-ट्रेन का बचा समय)। = √(9/4) = 3/2। तो गतियों का अनुपात 3 : 2 है — A से चलने वाली ट्रेन तेज़ है, जो इस बात से मेल खाता है कि उसे अपनी बची दूरी पूरी करने में कम समय चाहिए। उत्तर: 3 : 2
- Practice: 200 मीटर लंबी एक ट्रेन 90 km/hr की गति से चल रही है। एक लैंप पोस्ट को पार करने में उसे कितना समय लगेगा? (उत्तर: 8 सेकंड)
- Practice: 250 मीटर लंबी एक ट्रेन 108 km/hr की गति से चलते हुए एक प्लेटफ़ॉर्म को 30 सेकंड में पार करती है। प्लेटफ़ॉर्म की लंबाई ज्ञात करें। (उत्तर: 650 मीटर)
- Practice: 100 मीटर और 140 मीटर लंबी दो ट्रेनें समानांतर पटरियों पर एक ही दिशा में क्रमशः 63 km/hr और 45 km/hr की गति से चलती हैं। तेज़ ट्रेन को धीमी ट्रेन को पूरी तरह पार करने में लगने वाला समय ज्ञात करें। (उत्तर: 48 सेकंड)
- Practice: 180 मीटर लंबी एक ट्रेन 50 km/hr की गति से चल रही है। वह विपरीत दिशा में 4 km/hr की गति से चल रहे एक आदमी को पार करती है। समय ज्ञात करें। (उत्तर: 12 सेकंड। सापेक्ष गति = 54 km/hr = 15 m/s; 180/15।)
- Practice: 120 मीटर लंबी एक ट्रेन 56 km/hr की गति से चलते हुए, समान दिशा में 8 km/hr की गति से चल रहे एक आदमी को पार करती है। समय ज्ञात करें। (उत्तर: 9 सेकंड। सापेक्ष गति = 48 km/hr = 40/3 m/s; 120 ÷ (40/3)।)
- Practice: दो ट्रेनें एक साथ स्टेशन P और Q से एक-दूसरे की ओर चलना शुरू करती हैं। पार करने के बाद, वे Q और P तक पहुंचने में क्रमशः 16 घंटे और 9 घंटे लेती हैं। उनकी गतियों का अनुपात ज्ञात करें। (उत्तर: 3 : 4। √(9/16) = 3/4।)
- Practice: एक ट्रेन प्लेटफ़ॉर्म पर खड़े एक आदमी को 10 सेकंड में पार करती है, और पूरे 300 मीटर लंबे प्लेटफ़ॉर्म को 25 सेकंड में पार करती है। ट्रेन की लंबाई और गति ज्ञात करें। (उत्तर: लंबाई = 200 मीटर, गति = 20 m/s। गति = s मानें; ट्रेन की लंबाई = 10s; 10s + 300 = 25s से s = 20।)

त्वरित दोहराव: एक स्थिर बिंदु (खंभा, स्थिर खड़ा आदमी, सिग्नल) को पार करने का मतलब है ट्रेन अपनी खुद की लंबाई के बराबर दूरी तय करती है — उस बिंदु को शून्य लंबाई वाला मानें।; एक प्लेटफ़ॉर्म (या पुल) को पार करने का मतलब है ट्रेन अपनी खुद की लंबाई प्लस प्लेटफ़ॉर्म की लंबाई के बराबर दूरी तय करती है — पूरी ट्रेन को पूरे प्लेटफ़ॉर्म को पार करना होता है।; दो ट्रेनों का एक-दूसरे को पार करना: सापेक्ष गति (विपरीत दिशाओं के लिए गति का योग, एक ही दिशा के लिए गति का अंतर) का उपयोग करें, और तय करने वाली दूरी दोनों ट्रेनों की लंबाई का योग होती है — वस्तुओं वाला वही नियम, बस अब दो लंबाइयों के साथ।; यदि ट्रेन किसी चलते हुए (स्थिर नहीं) व्यक्ति को पार करती है, तो सापेक्ष गति का उपयोग ठीक दो ट्रेनों की तरह करें — विपरीत दिशाओं के लिए गति जोड़ें, एक ही दिशा के लिए घटाएं — लेकिन तय करने वाली दूरी अब भी बस ट्रेन की अपनी लंबाई है, क्योंकि व्यक्ति की कोई लंबाई नहीं जोड़नी है।; "मिलने के बाद आगे जाने" वाले प्रश्न: यदि दो ट्रेनें एक-दूसरे की ओर चलना शुरू करती हैं और पार करने के बाद, दूसरी ट्रेन के शुरुआती स्टेशन तक पहुंचने में क्रमशः a और b घंटे लेती हैं, तो (ट्रेन 1 की गति) / (ट्रेन 2 की गति) = $\sqrt{(b/a)}$ होता है।; मीटर में लंबाई और सेकंड में समय के साथ काम करने से पहले हमेशा km/hr को m/s में बदलें (× 5/18) — इकाइयों को मिलाना यहां सबसे आम गलती है।

रेस और गेम्स के प्रश्न हल सहित

एक रेस बस एक फिनिश लाइन के साथ टाइम-स्पीड-डिस्टेंस ही है — पेंच है "start" (दूरी या समय में एक शुरुआती बढ़त) और "beats by" (फिनिश पर अंतर), ये दोनों बस इस बात की तुलना हैं कि समय के एक साझा क्षण पर हर धावक कितनी दूर पहुंचा है। इस पेज में यह मानक पैटर्न, दूरी-शुरुआत और समय-शुरुआत को आपस में बदलना, तीन धावकों के परिणामों को मिलाना, और "X मीटर या Y सेकंड से जीता" वाला संयुक्त प्रश्न शामिल है, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। "A, B को X मीटर से हराता है" का मतलब है: जिस क्षण A फिनिश करता है, उस समय B को अभी भी X मीटर दौड़ना बाकी होता है। "A, B को X मीटर की शुरुआत देता है" का मतलब है B को फिनिश करने के लिए केवल (कुल दूरी − X) तय करनी होती है — B प्रभावी रूप से X मीटर आगे से शुरू करता है। "A, B को X सेकंड की शुरुआत देता है" का मतलब है B, A से X सेकंड पहले दौड़ना शुरू करता है — B की शुरुआती-बढ़त-समायोजित घड़ी पाने के लिए A के फिनिश समय में X सेकंड जोड़ें। "डेड हीट" (दोनों एक साथ फिनिश करते हैं) के लिए, यह शर्त स्थापित करें कि दोनों अपनी आवश्यक दूरी ठीक उसी समय में तय करते हैं, फिर अज्ञात के लिए हल करें। एक "दूरी शुरुआत" और एक "समय शुरुआत" एक-दूसरे में बदल जाती हैं जब आप धीमे धावक की गति जान लें: T सेकंड की समय-शुरुआत, (T × उस धावक की गति) मीटर की दूरी-शुरुआत के बराबर होती है, और इसके उल्टा भी। तीन धावकों के लिए, जहां आपको बताया जाए कि A, B को कितने से हराता है और B, C को कितने से हराता है (रेस दूरी के अंश या प्रतिशत के रूप में), दोनों गति-अनुपातों को गुणा करके मिलाएं — बस दोनों "हराने" की दूरियां न जोड़ें, क्योंकि हर एक का आधार अलग है।

उदाहरण

- A और B 100 मीटर की रेस दौड़ते हैं। A 10 सेकंड में फिनिश करता है, और B 12.5 सेकंड में फिनिश करता है (दोनों स्थिर गति से)। A, B को कितनी दूरी से हराता है? हल: B की गति = 100 / 12.5 = 8 m/s। t = 10 सेकंड पर (जब A फिनिश करता है), B ने 8 × 10 = 80 मीटर तय किया होता है। A, B को 100 − 80 = 20 मीटर से हराता है। उत्तर: 20 मीटर
- 100 मीटर की रेस में, A, B को 20 मीटर की शुरुआत देता है। A की गति 10 m/s है और B की गति 5 m/s है। A, B को कितने समय से हराता है? हल: A पूरे 100 मीटर दौड़ता है: समय = 100 / 10 = 10 सेकंड। B को केवल 100 − 20 = 80 मीटर तय करना है: समय = 80 / 5 = 16 सेकंड। A, B को 16 − 10 = 6 सेकंड से हराता है। उत्तर: 6 सेकंड
- 200 मीटर की रेस में, A, B को 4 सेकंड की शुरुआत देता है और फिर भी उसे 20 मीटर से हराता है। यदि A की गति 10 m/s है, तो B की गति ज्ञात करें। हल: 200 मीटर के लिए A का समय = 200 / 10 = 20 सेकंड। B ने 4 सेकंड पहले शुरुआत की, तो जब A फिनिश करता है, तब तक B 20 + 4 = 24 सेकंड से दौड़ रहा होता है। A, B को 20 मीटर से हराता है, तो उन 24 सेकंड में B ने 200 − 20 = 180 मीटर तय किया। B की गति = 180 / 24 = 7.5 m/s। उत्तर: 7.5 m/s
- 200 मीटर की रेस में, A की गति 10 m/s है और B की गति 8 m/s है। A को B को कितनी शुरुआत देनी चाहिए ताकि रेस डेड हीट (दोनों एक साथ फिनिश) में समाप्त हो? हल: 200 मीटर फिनिश करने के लिए A का समय = 200 / 10 = 20 सेकंड। उसी 20 सेकंड में, B 8 × 20 = 160 मीटर तय करता है। डेड हीट के लिए, B की आवश्यक दूरी भी 160 मीटर होनी चाहिए, तो शुरुआत = 200 − 160 = 40 मीटर। उत्तर: 40 मीटर
- 100 मीटर की रेस में, A, B को 5 सेकंड की शुरुआत देता है। यदि B की गति 4 m/s है, तो यह दूरी-शुरुआत के रूप में क्या होगा? हल: T सेकंड की समय-शुरुआत, उस धावक द्वारा दूसरे के शुरू होने से पहले तय किए गए T × गति मीटर के बराबर होती है। बराबर दूरी = 5 × 4 = 20 मीटर। उत्तर: 20 मीटर
- एक रेस में, A, B को 100 मीटर की रेस में 10 मीटर की शुरुआत दे सकता है, और B, C को उसी 100 मीटर की रेस में 10 मीटर की शुरुआत दे सकता है। यदि A, B और C तीनों एक साथ 100 मीटर की रेस दौड़ें, तो A, C को कितने से हराएगा? हल: A, B को 100 मीटर में 10 मीटर की शुरुआत देता है, तो जब A 100 मीटर तय करता है, B 90 मीटर तय करता है: गति अनुपात B/A = 90/100 = 9/10। इसी तरह, गति अनुपात C/B = 9/10। अनुपातों को मिलाएं (केवल दूरियां न जोड़ें): गति अनुपात C/A = (9/10) × (9/10) = 81/100। तो जब A 100 मीटर तय करता है, C 81 मीटर तय करता है। A, C को 100 − 81 = 19 मीटर से हराता है (10 + 10 = 20 मीटर नहीं)। उत्तर: 19 मीटर
- A और B 400 मीटर की रेस दौड़ते हैं। A, 40 मीटर या 10 सेकंड से जीतता है। A की गति ज्ञात करें। हल: "40 मीटर या 10 सेकंड" का मतलब है: B जो 40 मीटर पीछे रह गया, वही B उन अतिरिक्त 10 सेकंड में तय करता। तो B की गति = 40/10 = 4 m/s। B का पूरे 400 मीटर के लिए समय = 400/4 = 100 सेकंड। A उससे 10 सेकंड पहले फिनिश करता है: A का समय = 100 − 10 = 90 सेकंड। A की गति = 400/90 = 40/9 ≈ 4.44 m/s। उत्तर: 40/9 m/s ≈ 4.44 m/s
- Practice: A और B 200 मीटर की रेस दौड़ते हैं। A 20 सेकंड में फिनिश करता है, और B 25 सेकंड में फिनिश करता है (दोनों स्थिर गति से)। A, B को कितनी दूरी से हराता है? (उत्तर: 40 मीटर)
- Practice: 150 मीटर की रेस में, A, B को 30 मीटर की शुरुआत देता है। A की गति 15 m/s है और B की गति 10 m/s है। A, B को कितने समय से हराता है? (उत्तर: 2 सेकंड)

- Practice: 300 मीटर की रेस में, A की गति 12 m/s है और B की गति 9 m/s है। A को B को कितनी शुरुआत देनी चाहिए ताकि रेस डेड हीट में समाप्त हो? (उत्तर: 75 मीटर)
- Practice: 200 मीटर की रेस में, A, B को 8 सेकंड की शुरुआत देता है। यदि B की गति 5 m/s है, तो यह दूरी-शुरुआत के रूप में क्या होगा? (उत्तर: 40 मीटर। 8 × 5।)
- Practice: एक रेस में, A, B को 100 मीटर की रेस में 20 मीटर की शुरुआत दे सकता है, और B, C को उसी 100 मीटर की रेस में 10 मीटर की शुरुआत दे सकता है। A, तीनों की एक साथ 100 मीटर की रेस में C को कितने से हराएगा? (उत्तर: 28 मीटर। गति अनुपात C/A = (80/100) × (90/100) = 18/25; C 72 मीटर तय करता है जब A 100 मीटर तय करता है।)
- Practice: A और B 500 मीटर की रेस दौड़ते हैं। A, 50 मीटर या 10 सेकंड से जीतता है। A की गति ज्ञात करें। (उत्तर: 50/9 m/s ≈ 5.56 m/s। B की गति = 50/10 = 5 m/s; B का समय = 100 s; A का समय = 90 s; A की गति = 500/90।)
- Practice: 250 मीटर की रेस में, A की गति 10 m/s है और B की गति 8 m/s है। A को B को कितनी शुरुआत देनी चाहिए ताकि डेड हीट हो? (उत्तर: 50 मीटर। A का समय = 25 s; B 25 s में 200 मीटर तय करता है; शुरुआत = 250 − 200।)

> **त्वरित दोहराव:** "A, B को X मीटर से हराता है" का मतलब है: जिस क्षण A फिनिश करता है, उस समय B को अभी भी X मीटर दौड़ना बाकी होता है।; "A, B को X मीटर की शुरुआत देता है" का मतलब है B को फिनिश करने के लिए केवल (कुल दूरी − X) तय करनी होती है — B प्रभावी रूप से X मीटर आगे से शुरू करता है।; "A, B को X सेकंड की शुरुआत देता है" का मतलब है B, A से X सेकंड पहले दौड़ना शुरू करता है — B की शुरुआती-बढ़त-समायोजित घड़ी पाने के लिए A के फिनिश समय में X सेकंड जोड़ें।; "डेड हीट" (दोनों एक साथ फिनिश करते हैं) के लिए, यह शर्त स्थापित करें कि दोनों अपनी आवश्यक दूरी ठीक उसी समय में तय करते हैं, फिर अज्ञात के लिए हल करें।; एक "दूरी शुरुआत" और एक "समय शुरुआत" एक-दूसरे में बदल जाती हैं जब आप धीमे धावक की गति जान लें: T सेकंड की समय-शुरुआत, (T × उस धावक की गति) मीटर की दूरी-शुरुआत के बराबर होती है, और इसके उल्टा भी।; तीन धावकों के लिए, जहां आपको बताया जाए कि A, B को कितने से हराता है और B, C को कितने से हराता है (रेस दूरी के अंश या प्रतिशत के रूप में), दोनों गति-अनुपातों को गुणा करके मिलाएं — बस दोनों "हराने" की दूरियां न जोड़ें, क्योंकि हर एक का आधार अलग है।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/time-speed-distance/

बीजगणित — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

बीजगणित — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

व्यंजकों को विस्तारित या गुणनखंडित करने के लिए $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a − b)^2 = a^2 − 2ab + b^2$ और $(a + b)(a − b) = a^2 − b^2$ उपयोग करें। गुणनखंडन किसी व्यंजक को गुणनफल के रूप में फिर से लिखता है, और किसी गुणनखंड को काटना केवल तभी मान्य है जब वह गुणनखंड शून्येतर हो। दिए गए मानों को प्रतिस्थापित करते समय ऋणात्मक संख्याओं के चारों ओर कोष्ठक लगाएं और संक्रियाओं का क्रम बनाए रखें। गैर-ऋणात्मक मानों के लिए, वर्गमूल से वर्ग गुणनखंड निकालें, और एक द्विपद सर्ड हर को उसके संयुग्मी से अंश और हर दोनों को गुणा करके परिमेयीकृत करें। रेखीय समीकरणों को दोनों पक्षों पर समान उत्क्रमणीय संक्रिया लागू करके हल करें; $y = mx + c$ का ग्राफ एक सीधी रेखा है जिसका ढाल m और y-अंतःखंड c है।

एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ को अक्सर दो रेखीय कोष्ठकों में गुणनखंडित किया जा सकता है जिनका गुणनफल शून्य हो - यदि यह $(x − p)(x − q) = 0$ के रूप में गुणनखंडित होता है, तो $x = p$ या $x = q$, क्योंकि गुणनफल शून्य केवल तभी होता है जब कम से कम एक गुणनखंड शून्य हो। जब गुणनखंडन स्पष्ट न हो, तो द्विघात सूत्र $x = [−b ± \sqrt{(b^2−4ac)}] / 2a$ हमेशा काम करता है।

दो चरों वाले युगपत रेखीय समीकरणों की जोड़ी के लिए, विलोपन विधि (एक या दोनों समीकरणों को इस तरह गुणा करें कि एक चर के गुणांक मेल खाएं, फिर उसे काटने के लिए जोड़ें या घटाएं) समस्या को एक-चर समीकरण में बदल देती है, जिसे फिर वापस रखकर दूसरा चर ज्ञात किया जा सकता है।

घन सर्वसमिकाएं उसी पैटर्न को आगे बढ़ाती हैं: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 − ab + b^2)$ और $a^3 − b^3 = (a − b)(a^2 + ab + b^2)$ - घन जैसे दिखने वाले व्यंजकों को गुणनखंडित करने और बड़ी संख्याओं को सीधे घन किए बिना घनों के योग/अंतर की गणना करने दोनों के लिए उपयोगी।

उदाहरण

- $(21 + 4)^2 − (21 − 4)^2$ का मान ज्ञात करें। हल: दोनों वर्गों को विस्तारित करें। a^2 और b^2 पद कट जाते हैं, $4ab = 4 × 21 × 4 = 336$ शेष रहता है। सीधे जांच: $25^2 − 17^2 = 625 − 289 = 336$।
- मुख्य वर्गमूल $\sqrt{27}$ को $k\sqrt{3}$ के रूप में लिखा जाता है जहां k धनात्मक है। k ज्ञात करें। हल: $27 = 9 × 3$। मुख्य वर्गमूल लेने पर $\sqrt{9} × \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ मिलता है, तो $k = 3$।
- रेखा $y = 2x − 8$, x-अक्ष से मिलती है। इस प्रतिच्छेदन बिंदु का x-निर्देशांक ज्ञात करें। हल: x-अक्ष पर हर बिंदु का $y = 0$ होता है। $0 = 2x − 8$ रखने पर $x = 8/2 = 4$ मिलता है।
- $x^2 − 5x + 6 = 0$ को गुणनखंडन द्वारा हल करें। हल: दो संख्याएं जिनका गुणनफल 6 और योग −5 हो, वे −2 और −3 हैं, तो समीकरण $(x−2)(x−3) = 0$ के रूप में गुणनखंडित होता है, जिससे $x = 2$ या $x = 3$ मिलता है।
- युगपत समीकरण $2x + 3y = 19$ और $x − y = 2$ हल करें। हल: दूसरे समीकरण से, $x = y + 2$। प्रतिस्थापित करने पर: $2(y+2) + 3y = 19 → 5y + 4 = 19 → y = 3$, तो $x = 5$।

- घनों के योग सर्वसमिका का उपयोग करके $3^3 + 4^3$ ज्ञात करें। हल: $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = (3+4)(9-12+16) = 7\times13 = 91$। सीधे जांच: 27 + 64 = 91।
- $1/(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ के हर को परिमेयीकृत करें। हल: अंश और हर दोनों को संयुग्मी $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ से गुणा करें: $(\sqrt{5}+\sqrt{3})/((\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2) = (\sqrt{5}+\sqrt{3})/(5-3) = (\sqrt{5}+\sqrt{3})/2$।

> **त्वरित दोहराव:** $(a\pm b)^2 = a^2\pm2ab+b^2$; $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; गुणनखंड केवल शून्येतर होने पर काटें; संयुग्मी से परिमेयीकरण करें; y=mx+c का ढाल m है। द्विघात: $(x-p)(x-q)=0$ में गुणनखंडित करें या द्विघात सूत्र उपयोग करें। युगपत समीकरण: गुणांक मिलाकर एक चर हटाएं। घन सर्वसमिकाएं: $a^3\pm b^3 = (a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$।

सर्ड्स और इंडाइसिज़ के प्रश्न हल सहित

एक ही आधार (base) की घातों को मिलाने के लिए कुछ निश्चित नियम इस विषय में लगभग सब कुछ कवर करते हैं — असली कौशल बस उन्हें सही क्रम में लागू करना है। इस पेज में यह नियम, भिन्नात्मक घातें, समान-आधार समीकरण हल करना, और सर्ड्स की तुलना शामिल है, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। एक ही आधार की घातों के लिए: $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (गुणा करते समय घातें जोड़ें); $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (भाग करते समय घटाएं); $(a^m)^n = a^{mn}$ (घात की घात लेते समय गुणा करें)। किसी भी शून्येतर संख्या की घात 0 हमेशा 1 होती है ($a^0 = 1$)। एक ऋणात्मक घात का मतलब है "व्युत्क्रम": $a^{-n} = 1/a^n$। एक सर्ड एक अपरिमेय मूल है जिसे पूर्ण संख्या में सरल नहीं किया जा सकता, जैसे $\sqrt{2}$ या $\sqrt{3}$ ($\sqrt{4} = 2$ सर्ड नहीं है, क्योंकि यह पूरी तरह सरल हो जाता है)। इसे सरल करने के लिए, सबसे बड़ा पूर्ण-वर्ग गुणनखंड निकालें: $\sqrt{50} = \sqrt{(25 \times 2)} = 5\sqrt{2}$। हर में सर्ड वाली भिन्न को "परिमेयीकृत" करने के लिए, अंश और हर दोनों को उस सर्ड (या यदि हर में दो पद हों तो उसके संयुग्म) से गुणा करें, ताकि हर एक पूर्ण संख्या बन जाए: $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$। भिन्नात्मक घातें मूल होती हैं: a^(1/n) = $\sqrt[n]{a}$ (a का n-वां मूल), और a^(m/n) = ($\sqrt[n]{a}$)^m — मूल और घात को किसी भी क्रम में लागू करें, जो भी हाथ से करना आसान हो। जब किसी समीकरण के दोनों पक्ष एक ही आधार की घातें हों, तो केवल घातों को बराबर करें: यदि a^x = a^y (a > 0, a ≠ 1 के साथ), तो x = y। केवल "समान" सर्ड (मूल के नीचे एक ही संख्या) सीधे जुड़ते या घटते हैं, उनके गुणांकों को जोड़कर या घटाकर — $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, लेकिन $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ को एक सर्ड पद में नहीं मिलाया जा सकता। दो अलग सर्ड्स की तुलना के लिए, मूल हटाने के लिए दोनों को वर्ग करें, फिर वर्गित मानों की तुलना करें।

उदाहरण

- सरल करें: $2^5 \times 2^3$ हल: एक ही आधार है, तो घातें जोड़ें: $2^{5+3} = 2^8$। $2^8 = 256$। उत्तर: 256
- सरल करें: $(3^4)^2 \div 3^5$ हल: $(3^4)^2 = 3^8$ (घातों को गुणा करें)। $3^8 \div 3^5 = 3^{8-5} = 3^3 = 27$। उत्तर: 27
- $\sqrt{72}$ को सरल करें। हल: $72 = 36 \times 2$, और 36, 72 का सबसे बड़ा पूर्ण-वर्ग गुणनखंड है। $\sqrt{72} = \sqrt{(36 \times 2)} = 6\sqrt{2}$। उत्तर: $6\sqrt{2}$
- परिमेयीकृत करें: $1 / (2 + \sqrt{3})$ हल: अंश और हर दोनों को संयुग्म, $(2 - \sqrt{3})$, से गुणा करें: $[1 \times (2 - \sqrt{3})] / [(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})]$। हर बनता है $2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$। परिणाम: $(2 - \sqrt{3}) / 1 = 2 - \sqrt{3}$। उत्तर: $2 - \sqrt{3}$
- सरल करें: 8^(2/3) हल: 8^(2/3) = (8 का घनमूल)^2, क्योंकि भिन्नात्मक घात का हर ही मूल है। 8 का घनमूल = 2, तो परिणाम $2^2 = 4$ है। उत्तर: 4
- x के लिए हल करें: 2^(x+1) = 32 हल: 32 को 2 की घात के रूप में लिखें: $32 = 2^5$। अब दोनों पक्षों का आधार एक ही है, तो घातों को बराबर करें: x + 1 = 5। x = 4। उत्तर: x = 4
- सरल करें: $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5}$ हल: तीनों पद समान सर्ड हैं (मूल के नीचे एक ही संख्या, 5), तो उनके गुणांक मिलाएं। $(3 + 2 - 1)\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$। उत्तर: $4\sqrt{5}$
- कौन सा बड़ा है: $2\sqrt{5}$ या $3\sqrt{3}$? हल: मूल हटाने के लिए दोनों को वर्ग करें: $(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$। $(3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3 = 27$। चूंकि $27 > 20$, $3\sqrt{3}$ बड़ा है। उत्तर: $3\sqrt{3}$ बड़ा है
- Practice: सरल करें: $5^6 \div 5^2$ (उत्तर: 625)
- Practice: $\sqrt{98}$ को सरल करें। (उत्तर: $7\sqrt{2}$)
- Practice: सरल करें: $(2^3)^2 \times 2^{-4}$ (उत्तर: 4)
- Practice: सरल करें: 27^(2/3) (उत्तर: 9। 27 का घनमूल 3 है, फिर $3^2 = 9$।)
- Practice: x के लिए हल करें: 3^(2x−1) = 243 (उत्तर: x = 3। $243 = 3^5$, तो 2x−1 = 5।)
- Practice: सरल करें: $4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ (उत्तर: $7\sqrt{3}$। समान सर्ड: $(4+5-2)\sqrt{3}$।)
- Practice: कौन सा बड़ा है: $4\sqrt{2}$ या $3\sqrt{3}$? (उत्तर: $4\sqrt{2}$ बड़ा है। $(4\sqrt{2})^2 = 32$ और $(3\sqrt{3})^2 = 27$; $32 > 27$।)

> **त्वरित दोहराव:** एक ही आधार की घातों के लिए: $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (गुणा करते समय घातें जोड़ें); $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (भाग करते समय घटाएं); $(a^m)^n = a^{mn}$ (घात की घात लेते समय गुणा करें)।; किसी भी शून्येतर संख्या की घात 0 हमेशा 1 होती है ($a^0 = 1$)। एक ऋणात्मक घात का मतलब है "व्युत्क्रम": $a^{-n} = 1/a^n$।; एक सर्ड एक अपरिमेय मूल है जिसे पूर्ण संख्या में सरल नहीं किया जा सकता, जैसे $\sqrt{2}$ या $\sqrt{3}$ ($\sqrt{4} = 2$ सर्ड नहीं है, क्योंकि यह पूरी तरह सरल हो जाता है)। इसे सरल करने के लिए, सबसे बड़ा पूर्ण-वर्ग गुणनखंड निकालें: $\sqrt{50} = \sqrt{(25 \times 2)} = 5\sqrt{2}$।; हर में सर्ड वाली भिन्न को "परिमेयीकृत" करने के लिए, अंश और हर दोनों को उस सर्ड (या यदि हर में दो पद हों तो उसके संयुग्म) से गुणा करें, ताकि हर एक पूर्ण संख्या बन जाए: $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$।; भिन्नात्मक घातें मूल होती हैं: a^(1/n) = $\sqrt[n]{a}$ (a का n-वां मूल), और a^(m/n) = ($\sqrt[n]{a}$)^m — मूल और घात को किसी भी क्रम में लागू करें, जो भी हाथ से करना आसान हो।; जब किसी समीकरण के दोनों पक्ष एक ही आधार की घातें हों, तो केवल घातों को बराबर करें: यदि a^x = a^y (a > 0, a ≠ 1 के साथ), तो x = y।; केवल "समान" सर्ड (मूल के नीचे एक ही संख्या) सीधे जुड़ते या घटते हैं, उनके गुणांकों को जोड़कर या घटाकर — $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, लेकिन $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ को एक सर्ड पद में नहीं मिलाया जा सकता। दो अलग सर्ड्स की तुलना के लिए, मूल हटाने के लिए दोनों को वर्ग करें, फिर वर्गित मानों की तुलना करें।

द्विघात समीकरण के प्रश्न हल सहित

यह विषय एक द्विघात समीकरण हल करने के बारे में नहीं है — यह दो समीकरणों (एक x में, एक y में) को हल करने और फिर मूलों के हर संभावित जोड़े की तुलना करके x और y के बीच संबंध तय करने के बारे में है। इस पेज में यह तरीका, न फैक्टर होने वाले समीकरणों के लिए द्विघात सूत्र और विविक्तकर (discriminant), और मूलों के योग/गुणनफल वाला शॉर्टकट शामिल है, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। समीकरण I को हल करके x के सभी मान और समीकरण II को हल करके y के सभी मान निकालें — हर द्विघात समीकरण आमतौर पर दो मूल देता है। हर x की तुलना हर y से करें। यदि x हर संयोजन में बड़ा है, तो उत्तर "x > y" है; यदि x हमेशा छोटा है, तो यह "x < y" है। यदि कुछ संयोजन x को बड़ा और कुछ x को बराबर दिखाते हैं, तो उत्तर "x ≥ y" है (और इसी तरह "x ≤ y") — "x > y" नहीं, क्योंकि बराबरी भी होती है। यदि संयोजन वास्तव में टकराते हैं — कुछ x > y देते हैं, कुछ x < y (या x = y) — तो कोई एक संबंध हर स्थिति को कवर नहीं करता, इसलिए उत्तर "निर्धारित नहीं किया जा सकता" है। जब कोई समीकरण पूर्णांकों में साफ-साफ फैक्टर नहीं होता, तो द्विघात सूत्र का उपयोग करें: $ax^2 + bx + c = 0$ के लिए, $x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$। विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$ हल करने से पहले ही मूलों की प्रकृति बता देता है: $D > 0$ पर दो भिन्न वास्तविक मूल, $D = 0$ पर एक दोहरा वास्तविक मूल, $D < 0$ पर कोई वास्तविक मूल नहीं। पूरी तरह हल किए बिना शॉर्टकट: मूलों का योग = $-b/a$, और गुणनफल = c/a। ऋणात्मक गुणनफल का मतलब है दोनों मूलों के चिह्न विपरीत हैं (एक धनात्मक, एक ऋणात्मक) — इसे पहले ही जांच लेना फायदेमंद है, क्योंकि एक ऋणात्मक मूल अक्सर वरना साफ दिखने वाले "x > y" या "x < y" पैटर्न को तोड़ देता है। आम गलतियां: द्विघात सूत्र में वर्गमूल लेते समय ± भूल जाना, और फैक्टर करते समय चिह्न की गलती — हमेशा फैक्टर किए रूप को मन में दोबारा खोलकर जांचें कि वह मूल समीकरण जैसा ही बनता है।

उदाहरण

- I. $x^2 - 11x + 30 = 0$ II. $y^2 - 9y + 20 = 0$. x और y के बीच संबंध ज्ञात करें। हल: I: $x^2 - 11x + 30 = (x - 5)(x - 6) = 0$, तो x = 5 या 6। II: $y^2 - 9y + 20 = (y - 4)(y - 5) = 0$, तो y = 4 या 5। हर जोड़े की तुलना: (5,4)→x>y, (5,5)→x=y, (6,4)→x>y, (6,5)→x>y। x कभी y से छोटा नहीं होता, पर बराबर हो सकता है — तो संबंध है x ≥ y। उत्तर: x ≥ y
- I. $x^2 - 9x + 20 = 0$ II. $y^2 - 11y + 30 = 0$. x और y के बीच संबंध ज्ञात करें। हल: I: $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5) = 0$, तो x = 4 या 5। II: $y^2 - 11y + 30 = (y - 5)(y - 6) = 0$, तो y = 5 या 6। हर जोड़े की तुलना: (4,5)→x<y, (4,6)→x<y, (5,5)→x=y, (5,6)→x<y। x कभी y से बड़ा नहीं होता, पर बराबर हो सकता है — तो संबंध है x ≤ y। उत्तर: x ≤ y
- I. $x^2 - 7x + 12 = 0$ II. $y^2 - 3y + 2 = 0$. x और y के बीच संबंध ज्ञात करें। हल: I: $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4) = 0$, तो x = 3 या 4। II: $y^2 - 3y + 2 = (y - 1)(y - 2) = 0$, तो y = 1 या 2। x का हर मान (3 या 4) y के हर मान (1 या 2) से बड़ा है — बिना किसी बराबरी के सभी चार संयोजन x>y देते हैं। उत्तर: x > y
- I. $x^2 - 3x + 2 = 0$ II. $y^2 - 7y + 12 = 0$. x और y के बीच संबंध ज्ञात करें। हल: I: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = 0$, तो x = 1 या 2। II: $y^2 - 7y + 12 = (y - 3)(y - 4) = 0$, तो y = 3 या 4। x का हर मान (1 या 2) y के हर मान (3 या 4) से छोटा है — बिना किसी बराबरी के सभी चार संयोजन x<y देते हैं। उत्तर: x < y
- द्विघात सूत्र का उपयोग करते हुए $x^2 - 4x - 1 = 0$ को हल करें। हल: यहां a=1, b=−4, c=−1। विविक्तकर $D = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(-1) = 16 + 4 = 20$। $x = [-b \pm \sqrt{D}] / 2a = [4 \pm \sqrt{20}] / 2 = [4 \pm 2\sqrt{5}] / 2 = 2 \pm \sqrt{5}$। तो $x = 2 + \sqrt{5} \approx 4.24$, या $x = 2 - \sqrt{5} \approx -0.24$। उत्तर: $x = 2 + \sqrt{5}$ या $2 - \sqrt{5}$ (≈ 4.24 या ≈ −0.24)
- I. $x^2 - 8x + 15 = 0$ II. $y^2 - 2y - 15 = 0$. x और y के बीच संबंध ज्ञात करें। हल: I: $x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5) = 0$, तो x = 3 या 5। II: $y^2 - 2y - 15 = (y - 5)(y + 3) = 0$, तो y = 5 या −3। समीकरण II का ऋणात्मक गुणनफल (−15) पहले ही संकेत देता है कि एक मूल ऋणात्मक होगा। हर जोड़े की तुलना: (3,5)→x<y, (3,−3)→x>y, (5,5)→x=y, (5,−3)→x>y। परिणाम वास्तव में टकराते हैं (दोनों > और < आते हैं), तो संबंध निर्धारित नहीं किया जा सकता। उत्तर: निर्धारित नहीं किया जा सकता
- बिना पूरी तरह हल किए, $x^2 + 2x + 5 = 0$ के मूलों की प्रकृति तय करें। हल: a=1, b=2, c=5। विविक्तकर $D = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16$। चूंकि $D < 0$, समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है (इसके मूल सम्मिश्र हैं)। उत्तर: कोई वास्तविक मूल नहीं ($D = -16 < 0$)
- Practice: I. $x^2 - 6x + 9 = 0$ II. $y^2 - 6y + 9 = 0$. x और y के बीच संबंध ज्ञात करें। (उत्तर: x = y)
- Practice: I. $x^2 - 5x + 6 = 0$ II. $y^2 - 4y + 3 = 0$. x और y के बीच संबंध ज्ञात करें। (उत्तर: निर्धारित नहीं किया जा सकता)
- Practice: I. $x^2 - 4x + 3 = 0$ II. $y^2 - 11y + 30 = 0$. x और y के बीच संबंध ज्ञात करें। (उत्तर: x < y)
- Practice: द्विघात सूत्र का उपयोग करते हुए $x^2 - 6x - 2 = 0$ को हल करें। (उत्तर: $x = 3 \pm \sqrt{11}$। $D = 36+8 = 44$; $x = (6 \pm \sqrt{44})/2$।)
- Practice: I. $x^2 - x - 12 = 0$ II. $y^2 - 7y + 10 = 0$. x और y के बीच संबंध ज्ञात करें। (उत्तर: निर्धारित नहीं किया जा सकता। x = 4 या −3; y = 2 या 5; जोड़े दोनों x>y और x<y देते हैं।)
- Practice: बिना हल किए, $x^2 - 6x + 9 = 0$ के मूलों की प्रकृति तय करें। (उत्तर: वास्तविक और बराबर मूल। $D = 36-36 = 0$।)
- Practice: बिना हल किए, $2x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूलों की प्रकृति तय करें। (उत्तर: कोई वास्तविक मूल नहीं। $D = 9-40 = -31 < 0$।)

त्वरित दोहराव: समीकरण I को हल करके x के सभी मान और समीकरण II को हल करके y के सभी मान निकालें — हर द्विघात समीकरण आमतौर पर दो मूल देता है।; हर x की तुलना हर y से करें। यदि x हर संयोजन में बड़ा है, तो उत्तर "x > y" है; यदि x हमेशा छोटा है, तो यह "x < y" है।; यदि कुछ संयोजन x को बड़ा और कुछ x को बराबर दिखाते हैं, तो उत्तर "x ≥ y" है (और इसी तरह "x ≤ y") — "x > y" नहीं, क्योंकि बराबरी भी होती है।; यदि संयोजन वास्तव में टकराते हैं — कुछ x > y देते हैं, कुछ x < y (या x = y) — तो कोई एक संबंध हर स्थिति को कवर नहीं करता, इसलिए उत्तर "निर्धारित नहीं किया जा सकता" है।; जब कोई समीकरण पूर्णांकों में साफ-साफ फैक्टर नहीं होता, तो द्विघात सूत्र का उपयोग करें: $ax^2 + bx + c = 0$ के लिए, $x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$। विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$ हल करने से पहले ही मूलों की प्रकृति बता देता है: D > 0 पर दो भिन्न वास्तविक मूल, D = 0 पर एक दोहरा वास्तविक मूल, D < 0 पर कोई वास्तविक मूल नहीं।; पूरी तरह हल किए बिना शॉर्टकट: मूलों का योग = −b/a, और गुणनफल = c/a। ऋणात्मक गुणनफल का मतलब है दोनों मूलों के चिह्न विपरीत हैं (एक धनात्मक, एक ऋणात्मक) — इसे पहले ही जांच लेना फायदेमंद है, क्योंकि एक ऋणात्मक मूल अक्सर वरना साफ दिखने वाले "x > y" या "x < y" पैटर्न को तोड़ देता है।; आम गलतियां: द्विघात सूत्र में वर्गमूल लेते समय ± भूल जाना, और फैक्टर करते समय चिह्न की गलती — हमेशा फैक्टर किए रूप को मन में दोबारा खोलकर जांचें कि वह मूल समीकरण जैसा ही बनता है।

सरल समीकरण (Simple Equations) के प्रश्न हल सहित

इन प्रश्नों में मुश्किल हिस्सा समीकरण हल करना नहीं है — यह वाक्य को एक समीकरण में बदलना है। एक बार शब्द-समस्या बीजगणित बन जाए, तो यह सामान्य हो जाता है। इस पेज में यह अनुवाद कौशल, व्युत्क्रमण/प्रतिस्थापन से तंत्र हल करना, क्रमागत-संख्या वाले प्रश्न, और भिन्न वाले शब्द-प्रश्न शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। प्रश्न वास्तव में जिस अज्ञात मात्रा के बारे में पूछता है उसके लिए एक चर निर्धारित करें, और उस चर (और यदि दो अज्ञात हैं तो एक दूसरे चर) का उपयोग करके हर वाक्य को एक समीकरण में बदलें। वाक्यांश सीधे बदलते हैं: "का योग" → +, "का अंतर" → −, "Y से X अधिक" → Y + X, "Y से X कम" → Y − X, "किसी संख्या का दोगुना/तिगुना" → 2x/3x। दो अज्ञात के साथ, आपको दो स्वतंत्र समीकरणों की ज़रूरत होती है — किसी एक को हल करने की कोशिश करने से पहले दोनों लिखें। हल करने के बाद, अपने उत्तर को दोनों मूल वाक्यों में (केवल समीकरण में नहीं) वापस रखकर पुष्टि करें कि यह वास्तव में शब्द-समस्या को संतुष्ट करता है, केवल बीजगणित को नहीं। जब दो अज्ञातों वाले समीकरण सीधे "योग" और "अंतर" न हों (जैसे अलग-अलग दरों पर मिश्रित मात्राएं), तो व्युत्क्रमण (elimination) का उपयोग करें — एक या दोनों समीकरणों को इस तरह बड़ा करें कि किसी चर का गुणांक बराबर हो जाए, फिर घटाकर उसे हटाएं — या प्रतिस्थापन (substitution) का उपयोग करें — एक समीकरण से एक चर हल करें और दूसरे में रखें। "क्रमागत संख्याओं" वाले प्रश्नों के लिए, सभी को एक ही चर में एक निश्चित अंतराल के साथ व्यक्त करें: क्रमागत पूर्णांकों के लिए x, x+1, x+2, ...; क्रमागत सम या विषम संख्याओं के लिए x, x+2, x+4, ...। उनका दिया गया योग या संबंध तब एक सरल समीकरण बन जाता है।

उदाहरण

- दो संख्याओं का योग 45 है, और उनका अंतर 11 है। दोनों संख्याएं ज्ञात करें। हल: संख्याएं x और y मानें: x + y = 45 और x − y = 11। दोनों समीकरणों को जोड़ने पर: 2x = 56, तो x = 28। वापस रखने पर: y = 45 − 28 = 17। उत्तर: 28 और 17
- पांच साल पहले, एक पिता अपने बेटे से तीन गुना बड़ा था। अब से दस साल बाद, पिता बेटे से दोगुना बड़ा होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात करें। हल: बेटे की वर्तमान आयु = s और पिता की वर्तमान आयु = f मानें। पांच साल पहले: f − 5 = 3(s − 5), तो f = 3s − 10। अब से दस साल बाद: f + 10 = 2(s + 10), तो f = 2s + 10। इन्हें बराबर करने पर: 3s − 10 = 2s + 10, तो s = 20, और f = 2(20) + 10 = 50। उत्तर: पिता: 50 साल, बेटा: 20 साल
- एक संख्या दूसरी संख्या के दोगुने से 8 अधिक है। यदि दोनों संख्याओं का योग 50 है, तो दोनों संख्याएं ज्ञात करें। हल: संख्याएं x और y मानें, जहां x = 2y + 8। x + y = 50 में रखने पर: (2y + 8) + y = 50, तो 3y = 42, जिससे y = 14। फिर x = 2(14) + 8 = 36। उत्तर: 36 और 14
- किसी संख्या का तीन गुना, 7 कम करने पर, उस संख्या के दोगुने से 9 अधिक के बराबर है। संख्या ज्ञात करें। हल: संख्या x मानें: 3x − 7 = 2x + 9। दोनों तरफ से 2x घटाने पर: x − 7 = 9, तो x = 16। उत्तर: 16
- 3 पेन और 2 पेंसिल की कीमत ₹78 है। 5 पेन और 3 पेंसिल की कीमत ₹128 है। एक पेन और एक पेंसिल की कीमत ज्ञात करें। हल: मान लें एक पेन की कीमत p और एक पेंसिल की कीमत q है: 3p + 2q = 78 ... (1), और 5p + 3q = 128 ... (2)। q हटाने के लिए बड़ा करें: (1) को 3 से और (2) को 2 से गुणा करें: 9p + 6q = 234, और 10p + 6q = 256। घटाएं: p = 256 − 234 = 22। (1) में रखें: 3(22) + 2q = 78 → 66 + 2q = 78 → q = 6। (2) में जांचें: 5(22) + 3(6) = 110 + 18 = 128। मेल खाता है। उत्तर: पेन = ₹22, पेंसिल = ₹6
- तीन क्रमागत पूर्णांकों का योग 72 है। पूर्णांक ज्ञात करें। हल: पूर्णांक x, x+1, x+2 मानें। योग: x + (x+1) + (x+2) = 72 → 3x + 3 = 72 → x = 23। पूर्णांक हैं 23, 24, 25। उत्तर: 23, 24, 25
- यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में 3 जोड़ा जाए, तो यह 3/4 बन जाती है। यदि दोनों से 1 घटाया जाए, तो यह 1/2 बन जाती है। मूल भिन्न ज्ञात करें। हल: भिन्न x/y मानें। (x+3)/(y+3) = 3/4 → 4x + 12 = 3y + 9 → 4x − 3y = −3 ... (1)। (x−1)/(y−1) = 1/2 → 2x − 2 = y − 1 → y = 2x − 1 ... (2)। (2) को (1) में रखें: 4x − 3(2x−1) = −3 → 4x − 6x + 3 = −3 → −2x = −6 → x = 3। फिर y = 2(3) − 1 = 5। जांच: (3+3)/(5+3) = 6/8 = 3/4। (3−1)/(5−1) = 2/4 = 1/2। दोनों मेल खाते हैं। उत्तर: 3/5
- Practice: दो संख्याओं का योग 60 है, और उनका अंतर 14 है। दोनों संख्याएं ज्ञात करें। (उत्तर: 37 और 23)
- Practice: एक संख्या दूसरी संख्या के तीन गुने से 5 अधिक है। यदि दोनों संख्याओं का योग 45 है, तो दोनों संख्याएं ज्ञात करें। (उत्तर: 35 और 10)
- Practice: किसी संख्या का चार गुना, 9 कम करने पर, उस संख्या से 21 अधिक के बराबर है। संख्या ज्ञात करें। (उत्तर: 10)
- Practice: 4 नोटबुक और 3 पेन की कीमत ₹84 है। 3 नोटबुक और 2 पेन की कीमत ₹59 है। एक नोटबुक और एक पेन की कीमत ज्ञात करें। (उत्तर: नोटबुक = ₹9, पेन = ₹16। 2×(पहला) और 3×(दूसरा) से व्युत्क्रमण करें।)
- Practice: चार क्रमागत पूर्णांकों का योग 94 है। चारों में सबसे बड़ा ज्ञात करें। (उत्तर: 25। 4x+6=94 से x=22; सबसे बड़ा x+3 है।)
- Practice: तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 72 है। संख्याएं ज्ञात करें। (उत्तर: 22, 24, 26। x+(x+2)+(x+4)=72 से x=22।)

- Practice: यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में 2 जोड़ा जाए, तो यह 1/2 बन जाती है। यदि दोनों से 1 घटाया जाए, तो यह 1/3 बन जाती है। मूल भिन्न ज्ञात करें। (उत्तर: 4/10 (= 2/5)। y=2x+2 और y=3x−2 को साथ हल करने पर x=4, y=10 मिलता है।)

त्वरित दोहराव: प्रश्न वास्तव में जिस अज्ञात मात्रा के बारे में पूछता है उसके लिए एक चर निर्धारित करें, और उस चर (और यदि दो अज्ञात हैं तो एक दूसरे चर) का उपयोग करके हर वाक्य को एक समीकरण में बदलें।; वाक्यांश सीधे बदलते हैं: "का योग" → +, "का अंतर" → −, "Y से X अधिक" → Y + X, "Y से X कम" → Y − X, "किसी संख्या का दोगुना/तिगुना" → 2x/3x।; दो अज्ञात के साथ, आपको दो स्वतंत्र समीकरणों की ज़रूरत होती है — किसी एक को हल करने की कोशिश करने से पहले दोनों लिखें।; हल करने के बाद, अपने उत्तर को दोनों मूल वाक्यों में (केवल समीकरण में नहीं) वापस रखकर पुष्टि करें कि यह वास्तव में शब्द-समस्या को संतुष्ट करता है, केवल बीजगणित को नहीं।; जब दो अज्ञातों वाले समीकरण सीधे "योग" और "अंतर" न हों (जैसे अलग-अलग दरों पर मिश्रित मात्राएं), तो व्युत्क्रमण (elimination) का उपयोग करें — एक या दोनों समीकरणों को इस तरह बड़ा करें कि किसी चर का गुणांक बराबर हो जाए, फिर घटाकर उसे हटाएं — या प्रतिस्थापन (substitution) का उपयोग करें — एक समीकरण से एक चर हल करें और दूसरे में रखें।; "क्रमागत संख्याओं" वाले प्रश्नों के लिए, सभी को एक ही चर में एक निश्चित अंतराल के साथ व्यक्त करें: क्रमागत पूर्णांकों के लिए x, x+1, x+2, ...; क्रमागत सम या विषम संख्याओं के लिए x, x+2, x+4, ...। उनका दिया गया योग या संबंध तब एक सरल समीकरण बन जाता है।

बीजगणितीय सर्वसमिकाएं (Algebraic Identities) के प्रश्न हल सहित

कुछ निश्चित सर्वसमिकाएं आपको a और b को अलग-अलग हल किए बिना a^2+b^2 या ab खोजने देती हैं — और वही सर्वसमिकाएं 97×103 जैसे एक अटपटे गुणन को घटाव में बदल देती हैं। इस पेज में वर्ग वाली सर्वसमिकाएं, वर्गों का अंतर, और घनों का योग/अंतर शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। दो मूल सर्वसमिकाएं: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, और $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$। पुनर्व्यवस्थित करने पर, हर एक a^2+b^2 को $(a+b)^2$ या $(a-b)^2$ और ab से जोड़ती है — तीनों में से कोई भी दो दिए जाने पर, तीसरा ज्ञात करें। वर्गों का अंतर: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ — यह दो संख्याओं को गुणा करने की तरकीब है जो एक गोल संख्या से बराबर दूरी पर हैं, जैसे 97×103 = (100−3)(100+3)। जब कोई प्रश्न a+b (या a−b) और ab देता है, तो यह परखता है कि क्या आप जानते हैं $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ (या $(a-b)^2 + 2ab$) — पहले a और b को अलग-अलग खोजने की कोशिश न करें। ये सर्वसमिकाएं दोनों दिशाओं में काम करती हैं: किसी अभिव्यक्ति को विस्तारित करने के लिए, या a^2+b^2 और a+b (या a−b) से वापस ab खोजने के लिए इनका उपयोग करें। घनों का योग और अंतर: $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, और $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ — इनसे किसी घन अभिव्यक्ति को गुणनखंडित करें, जैसे $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$। जब आप पहले से a+b (या a−b) और ab जानते हों, तो a^3+b^3 या a^3-b^3 पाने का तेज़ तरीका: $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$, और $a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ — यह $a^2 \mp ab+b^2$ को अलग से निकालने से बचाता है।

उदाहरण

- यदि a+b = 10 और ab = 21, तो $a^2 + b^2$ ज्ञात करें। हल: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$। = $10^2 - 2(21) = 100 - 42 = 58$। उत्तर: 58
- यदि a−b = 4 और ab = 12, तो $a^2 + b^2$ ज्ञात करें। हल: $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$। = $4^2 + 2(12) = 16 + 24 = 40$। उत्तर: 40
- सर्वसमिकाओं का उपयोग करके सरल करें: 97 × 103 हल: 97 × 103 = (100−3)(100+3) = $100^2 - 3^2$। = 10,000 − 9 = 9,991। उत्तर: 9,991
- यदि a+b = 7 और $a^2 + b^2 = 25$, तो ab ज्ञात करें। हल: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, तो $49 = 25 + 2ab$। $2ab = 24$, तो ab = 12। उत्तर: 12
- यदि a+b = 5 और ab = 6, तो $a^3 + b^3$ ज्ञात करें। हल: $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$। = $5^3 - 3(6)(5) = 125 - 90 = 35$। उत्तर: 35
- पूरी तरह गुणनखंडित करें: $x^3 - 8$ हल: 8 को 2^3 लिखें, फिर घनों के अंतर का सूत्र लगाएं: $x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$। उत्तर: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
- यदि a−b = 3 और ab = 10, तो $a^3 - b^3$ ज्ञात करें। हल: $a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$। = $3^3 + 3(10)(3) = 27 + 90 = 117$। उत्तर: 117
- Practice: यदि a+b = 12 और ab = 27, तो $a^2 + b^2$ ज्ञात करें। (उत्तर: 90)
- Practice: सर्वसमिकाओं का उपयोग करके सरल करें: 95 × 105 (उत्तर: 9,975)
- Practice: यदि a−b = 6 और $a^2 + b^2 = 58$, तो ab ज्ञात करें। (उत्तर: 11)
- Practice: यदि a+b = 6 और ab = 8, तो $a^3 + b^3$ ज्ञात करें। (उत्तर: 72। $6^3 - 3(8)(6) = 216 - 144$।)
- Practice: पूरी तरह गुणनखंडित करें: $x^3 - 27$ (उत्तर: $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$। $27 = 3^3$।)
- Practice: यदि a−b = 2 और ab = 15, तो $a^3 - b^3$ ज्ञात करें। (उत्तर: 98। $2^3 + 3(15)(2) = 8 + 90$।)
- Practice: सर्वसमिकाओं का उपयोग करके सरल करें: 998 × 1002 (उत्तर: 999,996। (1000−2)(1000+2) = 1,000,000 − 4।)

त्वरित दोहराव: दो मूल सर्वसमिकाएं: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, और $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$। पुनर्व्यवस्थित करने पर, हर एक a^2+b^2 को $(a+b)^2$ या $(a-b)^2$ और ab से जोड़ती है — तीनों में से कोई भी दो दिए जाने पर, तीसरा ज्ञात करें।; वर्गों का अंतर: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ — यह दो संख्याओं को गुणा करने की तरकीब है जो एक गोल संख्या से बराबर दूरी पर हैं, जैसे 97×103 = (100−3)(100+3)।; जब कोई प्रश्न a+b (या a−b) और ab देता है, तो यह परखता है कि क्या आप जानते हैं $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ (या $(a-b)^2 + 2ab$) — पहले a और b को अलग-अलग खोजने की कोशिश न करें।; ये सर्वसमिकाएं दोनों दिशाओं में काम करती हैं: किसी अभिव्यक्ति को विस्तारित करने के लिए, या a^2+b^2 और a+b (या a−b) से वापस ab खोजने के लिए इनका उपयोग करें।; घनों का योग और अंतर: $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, और $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ — इनसे किसी घन अभिव्यक्ति को गुणनखंडित करें, जैसे $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$।; जब आप पहले से a+b (या a−b) और ab जानते हों, तो a^3+b^3 या a^3-b^3 पाने का तेज़ तरीका: $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$, और $a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ — यह $a^2 \mp ab+b^2$ को अलग से निकालने से बचाता है।

बैंकर्स डिस्काउंट और सत्य बट्टा (True Discount) के प्रश्न हल सहित

बैंकर्स डिस्काउंट और सत्य बट्टा (True Discount) के प्रश्न हल सहित

भविष्य में देय एक बिल आज कम मूल्य का होता है — सत्य बट्टा (True Discount) इस अंतर को सही ढंग से मापता है, जबकि तुरंत भुगतान करने वाला एक बैंकर इसके बजाय पूरी भविष्य की राशि पर साधारण ब्याज लेता है, जो हमेशा थोड़ा ज़्यादा होता है। इस पेज में मुख्य सूत्र, बैंकर्स गेन के शॉर्टकट, और बिल की राशि व दर निकालने वाले उलटे प्रश्न शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। वर्तमान मूल्य (PW) वह राशि है जो आज दी गई दर पर निवेश करने पर भविष्य की तारीख में देय राशि (A) में बढ़ जाएगी। सत्य बट्टा (TD) = A − PW। सूत्र: PW = 100×A / (100 + R×T), तो TD = A − PW, जहां R वार्षिक दर है और T वर्षों में समय है। बैंकर्स डिस्काउंट (BD) सरल है पर कम सटीक — यह बस अवधि-शेष समय के लिए पूरी भविष्य की राशि पर साधारण ब्याज है: BD = A×R×T / 100। BD हमेशा TD से ≥ होता है। बैंकर्स गेन (BG) = BD − TD — वह अतिरिक्त राशि जो बैंकर छोटे वर्तमान मूल्य के बजाय पूरी भविष्य की राशि पर ब्याज लेकर प्रभावी रूप से कमाता है। कुछ मान पहले से होने पर उपयोगी शॉर्टकट: बैंकर्स गेन = $TD^2 / PW = (BD \times TD) / A$। इनसे अलग से R और T निकाले बिना सीधे BG पाया जा सकता है। जो उलटे प्रश्न सीधे BD और TD (या BG) देते हैं उन्हें चरण-दर-चरण हल करें: पहले BG = BD − TD निकालें, फिर $PW = TD^2/BG$, फिर A = PW + TD, और अंत में TD = A×RT/(100+RT) का उपयोग करके दर (दिए गए समय के लिए) या समय (दी गई दर के लिए) निकालें।

उदाहरण

- ₹1,200 जो 2 वर्ष बाद देय है, पर 10% वार्षिक साधारण ब्याज दर से वर्तमान मूल्य (PW) और सत्य बट्टा (TD) ज्ञात करें। हल: PW = 100 × 1,200 / (100 + 10×2) = 120,000 / 120 = ₹1,000। TD = A − PW = 1,200 − 1,000 = ₹200। उत्तर: PW = ₹1,000, TD = ₹200
- ₹1,200 जो 2 वर्ष बाद देय है, पर 10% वार्षिक दर से बैंकर्स डिस्काउंट (BD) ज्ञात करें। हल: BD = A×R×T / 100 = 1,200 × 10 × 2 / 100 = ₹240। उत्तर: ₹240
- उसी बिल के लिए, BD = ₹240 और TD = ₹200। बैंकर्स गेन (BG) ज्ञात करें। हल: BG = BD − TD = 240 − 200 = ₹40। उत्तर: ₹40
- 2 वर्ष बाद देय एक बिल पर 10% वार्षिक दर से बैंकर्स डिस्काउंट ₹360 है। सत्य बट्टा ज्ञात करें। हल: पहले BD से राशि ज्ञात करें: A = BD × 100 / (R×T) = 360 × 100 / 20 = ₹1,800। TD = A × R×T / (100 + R×T) = 1,800 × 20 / 120 = ₹300। उत्तर: ₹300
- यदि किसी बिल का सत्य बट्टा ₹40 है और वर्तमान मूल्य ₹400 है, तो शॉर्टकट सूत्र का उपयोग करते हुए बैंकर्स गेन ज्ञात करें। हल: BG = $TD^2 / PW = 40^2 /$ 400 = 1,600 / 400 = ₹4। उत्तर: ₹4
- ₹2,200 के एक बिल पर, सत्य बट्टा ₹200 है और बैंकर्स डिस्काउंट ₹220 है। BG = BD − TD और BG = (BD × TD)/A दोनों से बैंकर्स गेन की जांच करें। हल: सीधे: BG = BD − TD = 220 − 200 = ₹20। शॉर्टकट: BG = (BD × TD)/A = (220 × 200)/2,200 = 44,000/2,200 = ₹20। दोनों तरीके मेल खाते हैं। उत्तर: ₹20
- 1 वर्ष में देय एक बिल पर बैंकर्स डिस्काउंट और सत्य बट्टा क्रमशः ₹120 और ₹100 हैं। बिल की राशि और ब्याज दर ज्ञात करें। हल: BG = BD − TD = 120 − 100 = 20। फिर $PW = TD^2/BG = 100^2/20$ = 10,000/20 = ₹500। राशि = PW + TD = 500 + 100 = ₹600। T = 1 के साथ TD = A×RT/(100+RT) का उपयोग करें: 100 = 600R/(100+R) → 10,000 + 100R = 600R → R = 10,000/500 = 20%। उत्तर: राशि = ₹600, दर = 20% वार्षिक
- Practice: ₹2,400 जो 2 वर्ष बाद देय है, पर 10% वार्षिक साधारण ब्याज दर से वर्तमान मूल्य और सत्य बट्टा ज्ञात करें। (उत्तर: PW = ₹2,000, TD = ₹400)
- Practice: ₹2,400 जो 2 वर्ष बाद देय है, पर 10% वार्षिक दर से बैंकर्स डिस्काउंट ज्ञात करें। (उत्तर: ₹480)
- Practice: 2 वर्ष बाद देय एक बिल पर 10% वार्षिक दर से बैंकर्स डिस्काउंट ₹480 है। सत्य बट्टा ज्ञात करें। (उत्तर: ₹400)
- Practice: यदि किसी बिल का सत्य बट्टा ₹60 है और वर्तमान मूल्य ₹900 है, तो शॉर्टकट सूत्र से बैंकर्स गेन ज्ञात करें। (उत्तर: ₹4। BG = TD^2/PW = 3,600/900।)
- Practice: ₹1,320 के एक बिल पर, सत्य बट्टा ₹120 है और बैंकर्स डिस्काउंट ₹132 है। दोनों सूत्रों से बैंकर्स गेन की जांच करें। (उत्तर: दोनों तरीकों से ₹12: 132−120, और (132×120)/1,320।)
- Practice: 1 वर्ष में देय एक बिल पर बैंकर्स डिस्काउंट और सत्य बट्टा क्रमशः ₹216 और ₹200 हैं। बिल की राशि और ब्याज दर ज्ञात करें। (उत्तर: राशि = ₹2,700, दर = 8%। BG=16, $PW=TD^2/BG$=2,500, A=PW+TD=2,700; फिर 200=2,700R/(100+R) हल करें।)
- Practice: ₹3,600 जो 2 वर्ष बाद देय है, पर 10% वार्षिक साधारण ब्याज दर से वर्तमान मूल्य और सत्य बट्टा ज्ञात करें। (उत्तर: PW = ₹3,000, TD = ₹600।)

त्वरित दोहराव: वर्तमान मूल्य (PW) वह राशि है जो आज दी गई दर पर निवेश करने पर भविष्य की तारीख में देय राशि (A) में बढ़ जाएगी। सत्य बट्टा (TD) = A − PW; सूत्र: PW = 100×A / (100 + R×T), तो TD = A − PW, जहां R वार्षिक दर है और T वर्षों में समय है; बैंकर्स डिस्काउंट (BD) सरल है पर कम सटीक — यह बस अवधि-शेष समय के लिए पूरी भविष्य की राशि पर साधारण ब्याज है: BD = A×R×T / 100। BD हमेशा TD से ≥ होता है; बैंकर्स गेन (BG) = BD − TD — वह अतिरिक्त राशि जो बैंकर छोटे वर्तमान मूल्य के बजाय पूरी भविष्य की राशि पर ब्याज लेकर प्रभावी रूप से कमाता है; कुछ मान पहले से होने पर उपयोगी शॉर्टकट: बैंकर्स गेन = $TD^2 / PW = (BD \times TD) / A$। इनसे अलग से R और T निकाले बिना सीधे BG पाया जा सकता है; जो उलटे प्रश्न सीधे BD और TD (या BG) देते हैं उन्हें चरण-दर-चरण हल करें: पहले BG = BD − TD निकालें, फिर $PW = TD^2/BG$, फिर A = PW + TD, और अंत में TD = A×RT/(100+RT) का उपयोग करके दर (दिए गए समय के लिए) या समय (दी गई दर के लिए) निकालें।

नाव और धारा (बोट एंड स्ट्रीम)

नाव और धारा: डाउनस्ट्रीम और अपस्ट्रीम चाल

यदि शांत पानी में नाव की चाल B है और धारा की चाल S है: धारा की दिशा में (डाउनस्ट्रीम) चाल = B + S, और धारा के विपरीत (अपस्ट्रीम) चाल = B − S। डाउनस्ट्रीम चाल (D) और अपस्ट्रीम चाल (U) दिए जाने पर, सूत्र को उल्टा करके नाव और धारा की अपनी चाल निकाली जा सकती है: नाव की चाल = (D + U) / 2, धारा की चाल = (D − U) / 2। एक बार डाउनस्ट्रीम या अपस्ट्रीम चाल पता चल जाए, तो यह एक सामान्य चाल, समय और दूरी का सवाल बन जाता है - हमेशा की तरह समय = दूरी / चाल लागू करें। एक ही दूरी डाउनस्ट्रीम और वापस अपस्ट्रीम तय करने वाले राउंड ट्रिप के लिए, दो-असमान-चाल औसत-चाल शॉर्टकट उपयोग करें: औसत चाल = 2 × डाउनस्ट्रीम चाल × अपस्ट्रीम चाल / (डाउनस्ट्रीम चाल + अपस्ट्रीम चाल)।

एक उपयोगी अनुपात शॉर्टकट: यदि एक नाव समान दूरी अपस्ट्रीम और डाउनस्ट्रीम तय करने में एक निश्चित समय अनुपात लेती है, तो चाल का अनुपात समय के अनुपात का ठीक उल्टा होता है (क्योंकि निश्चित दूरी के लिए चाल और समय विपरीत आनुपातिक होते हैं)। तो यदि अपस्ट्रीम समय डाउनस्ट्रीम समय का दोगुना है, तो डाउनस्ट्रीम चाल अपस्ट्रीम चाल की दोगुनी है - और B=(D+U)/2 और S=(D-U)/2 के माध्यम से पीछे काम करने पर पता चलता है कि नाव की शांत पानी की चाल धारा की चाल से ठीक 3 गुना है। इससे कई "समय के अनुपात" वाले प्रश्न बिना वास्तविक दूरी निकाले हल किए जा सकते हैं।

याद रखने योग्य एक शर्त: धारा की चाल हमेशा नाव की अपनी चाल से सख्ती से कम होनी चाहिए (S < B)। यदि धारा नाव जितनी या उससे तेज़ होती, तो अपस्ट्रीम चाल B − S शून्य या ऋणात्मक हो जाती, जिसका अर्थ है कि नाव धारा के विपरीत कभी आगे नहीं बढ़ पाती - यदि नाव की चाल का उत्तर धारा की चाल से कम आता है, तो यह गणना में त्रुटि का संकेत है, वैध स्थिति का नहीं।

जिन राउंड-ट्रिप प्रश्नों में एक-तरफ़ा दूरी सीधे दी गई हो (केवल कुल समय नहीं), वहां केवल डाउनस्ट्रीम और अपस्ट्रीम यात्रा के समय को अलग-अलग समय = दूरी/चाल से जोड़ें - जब दूरी पहले से पता हो तो किसी शॉर्टकट सूत्र की ज़रूरत नहीं; ऊपर दिया औसत-चाल शॉर्टकट केवल तब है जब दूरी अज्ञात हो पर कुल समय पता हो।

उदाहरण

- शांत पानी में एक नाव की चाल 10 km/hr है और धारा की चाल 4 km/hr है: डाउनस्ट्रीम चाल = 10 + 4 = 14 km/hr, अपस्ट्रीम चाल = 10 − 4 = 6 km/hr।
- एक नाव डाउनस्ट्रीम 24 km, 2 घंटे में तय करती है (डाउनस्ट्रीम चाल = 24/2 = 12 km/hr); यदि इसकी शांत पानी में चाल 9 km/hr है, तो धारा की चाल = 12 − 9 = 3 km/hr।
- एक नाव की डाउनस्ट्रीम चाल 18 km/hr है और अपस्ट्रीम चाल 12 km/hr है: शांत पानी में चाल = (18+12)/2 = 15 km/hr, धारा की चाल = (18−12)/2 = 3 km/hr, और राउंड ट्रिप की औसत चाल = 2×18×12/(18+12) = 14.4 km/hr।
- यदि एक नाव समान दूरी अपस्ट्रीम तय करने में डाउनस्ट्रीम से दोगुना समय लेती है, तो डाउनस्ट्रीम चाल अपस्ट्रीम चाल की दोगुनी होनी चाहिए (D = 2U); B=(D+U)/2 और S=(D-U)/2 से काम करने पर पता चलता है कि नाव की शांत पानी की चाल धारा की चाल से ठीक 3 गुना है।
- शांत पानी में एक नाव की चाल 9 km/hr है और धारा की चाल 3 km/hr है। 24 km की एक-तरफ़ा यात्रा के लिए: डाउनस्ट्रीम चाल 12 km/hr से 24/12 = 2 घंटे लगते हैं, अपस्ट्रीम चाल 6 km/hr से 24/6 = 4 घंटे लगते हैं, तो कुल राउंड-ट्रिप समय 2 + 4 = 6 घंटे है।
- धारा की चाल कभी भी नाव की अपनी चाल के बराबर या उससे अधिक नहीं हो सकती: यदि गणना में अपस्ट्रीम चाल 0 या ऋणात्मक आती है, तो कहीं नाव और धारा की चाल आपस में बदल गई हैं, क्योंकि एक वास्तविक नाव हमेशा वास्तविक धारा के विपरीत कुछ न कुछ आगे बढ़ ही सकती है।
- शांत पानी में एक नाव की चाल 12 km/hr है, और धारा की चाल 3 km/hr है: इसकी अपस्ट्रीम चाल 12 − 3 = 9 km/hr है - ध्यान दें यह अभी भी धनात्मक है, जो आवश्यक शर्त 3 < 12 की पुष्टि करता है।

> **त्वरित दोहराव:** डाउनस्ट्रीम = नाव + धारा; अपस्ट्रीम = नाव − धारा। नाव की चाल = (D+U)/2; धारा की चाल = (D−U)/2। राउंड ट्रिप औसत चाल = 2DU/(D+U)। अपस्ट्रीम:डाउनस्ट्रीम समय अनुपात उल्टा होकर चाल अनुपात देता है। धारा की चाल हमेशा नाव की चाल से कम होनी चाहिए (S < B)।

नाव और धारा (बोट एंड स्ट्रीम) के प्रश्न हल सहित

नाव और धारा के प्रश्न चाल, समय और दूरी के प्रश्न ही हैं, बस एक अलग रूप में — पहले नाव और धारा की चाल को डाउनस्ट्रीम या अपस्ट्रीम चाल में बदलें, फिर वही सूत्र लागू होते हैं जो आप पहले से जानते हैं। इस पेज में यह रूपांतरण, कुल समय देकर राउंड ट्रिप, और समय-अनुपात शॉर्टकट शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। यदि शांत पानी में नाव की चाल B है और धारा की चाल S है: धारा की दिशा में (डाउनस्ट्रीम) चाल = B + S। धारा के विपरीत (अपस्ट्रीम) चाल = B − S। डाउनस्ट्रीम चाल (D) और अपस्ट्रीम चाल (U) दिए जाने पर, आप सूत्र को उल्टा करके नाव और धारा की अपनी चाल निकाल सकते हैं: नाव की चाल = (D + U) / 2, धारा की चाल = (D − U) / 2। एक बार आपके पास डाउनस्ट्रीम या अपस्ट्रीम चाल आ जाए, तो यह एक सामान्य चाल, समय और दूरी का सवाल है — हमेशा की तरह समय = दूरी / चाल लागू करें। एक ही दूरी डाउनस्ट्रीम और वापस अपस्ट्रीम तय करने वाले राउंड ट्रिप के लिए, चाल, समय और दूरी वाला वही दो-असमान-चाल औसत-चाल शॉर्टकट उपयोग करें: औसत चाल = 2 × डाउनस्ट्रीम चाल × अपस्ट्रीम चाल / (डाउनस्ट्रीम चाल + अपस्ट्रीम चाल)। यदि प्रश्न में एक-तरफा डेटा के बजाय राउंड ट्रिप का कुल समय दिया है, तो एक समीकरण बनाएं: कुल समय = दूरी/डाउनस्ट्रीम चाल + दूरी/अपस्ट्रीम चाल, और अज्ञात (आमतौर पर दूरी) के लिए हल करें। यदि समान दूरी के लिए अपस्ट्रीम में लगने वाला समय डाउनस्ट्रीम समय का कोई गुणज n है, तो डाउनस्ट्रीम चाल = n × अपस्ट्रीम चाल (क्योंकि स्थिर दूरी के लिए समय और चाल व्युत्क्रमानुपाती हैं) — इससे नाव की चाल : धारा की चाल = (n + 1) : (n − 1) मिलता है। ध्यान से पढ़ें कि "नाव की चाल" का मतलब उसकी शांत पानी की चाल है या पहले से संयुक्त डाउनस्ट्रीम/अपस्ट्रीम चाल — शब्दों से ही तय होता है कि पहले कौन सा सूत्र लागू करें।

उदाहरण

- शांत पानी में एक नाव की चाल 10 km/hr है, और धारा की चाल 4 km/hr है। नाव की डाउनस्ट्रीम और अपस्ट्रीम चाल ज्ञात करें। हल: डाउनस्ट्रीम चाल = नाव की चाल + धारा की चाल = 10 + 4 = 14 km/hr। अपस्ट्रीम चाल = नाव की चाल − धारा की चाल = 10 − 4 = 6 km/hr। उत्तर: डाउनस्ट्रीम = 14 km/hr, अपस्ट्रीम = 6 km/hr
- एक नाव डाउनस्ट्रीम 24 km, 2 घंटे में तय कर सकती है। यदि शांत पानी में नाव की चाल 9 km/hr है, तो धारा की चाल ज्ञात करें। हल: डाउनस्ट्रीम चाल = दूरी / समय = 24 / 2 = 12 km/hr। धारा की चाल = डाउनस्ट्रीम चाल − नाव की चाल = 12 − 9 = 3 km/hr। उत्तर: 3 km/hr
- एक व्यक्ति अपस्ट्रीम 15 km, 3 घंटे में तय कर सकता है, और शांत पानी में उसकी चाल 7 km/hr है। धारा की चाल ज्ञात करें और वह उतनी ही 15 km डाउनस्ट्रीम तय करने में कितना समय लेगा। हल: अपस्ट्रीम चाल = दूरी / समय = 15 / 3 = 5 km/hr। धारा की चाल = नाव की चाल − अपस्ट्रीम चाल = 7 − 5 = 2 km/hr। डाउनस्ट्रीम चाल = नाव की चाल + धारा की चाल = 7 + 2 = 9 km/hr। डाउनस्ट्रीम समय = दूरी / चाल = 15 / 9 = 5/3 घंटे = 1 घंटा 40 मिनट। उत्तर: धारा की चाल = 2 km/hr, डाउनस्ट्रीम समय = 1 घंटा 40 मिनट
- एक नाव की डाउनस्ट्रीम चाल 18 km/hr है और अपस्ट्रीम चाल 12 km/hr है। नाव की शांत पानी में चाल, धारा की चाल, और नाव की एक ही दूरी दोनों तरफ तय करने वाले राउंड ट्रिप की औसत चाल ज्ञात करें। हल: नाव की चाल = (डाउनस्ट्रीम + अपस्ट्रीम) / 2 = (18 + 12) / 2 = 15 km/hr। धारा की चाल = (डाउनस्ट्रीम − अपस्ट्रीम) / 2 = (18 − 12) / 2 = 3 km/hr। राउंड ट्रिप की औसत चाल = 2 × 18 × 12 / (18 + 12) = 432 / 30 = 14.4 km/hr। उत्तर: नाव की चाल = 15 km/hr, धारा की चाल = 3 km/hr, राउंड ट्रिप औसत चाल = 14.4 km/hr
- एक व्यक्ति डाउनस्ट्रीम 12 km/hr और अपस्ट्रीम 8 km/hr की चाल से चलता है। वह किसी स्थान तक जाता है और वापस आता है, जिसमें कुल 5 घंटे लगते हैं। उस स्थान की दूरी ज्ञात करें। हल: मान लें दूरी d है। कुल समय = d/12 + d/8 = 5। d(1/12 + 1/8) = d(2/24 + 3/24) = d(5/24) = 5। d = 5 × 24/5 = 24 km। उत्तर: 24 km
- एक निश्चित दूरी के लिए, एक नाव को अपस्ट्रीम जाने में डाउनस्ट्रीम जाने से दोगुना समय लगता है। यदि नाव की शांत पानी में चाल 15 km/hr है, तो धारा की चाल ज्ञात करें। हल: समान दूरी के लिए अपस्ट्रीम समय = 2 × डाउनस्ट्रीम समय, तो डाउनस्ट्रीम चाल = 2 × अपस्ट्रीम चाल, यानी n = 2। नाव की चाल : धारा की चाल = (n+1) : (n−1) = 3 : 1। चूंकि नाव की चाल = 15, धारा की चाल = 15/3 = 5 km/hr। जाँच: डाउनस्ट्रीम = 15+5 = 20, अपस्ट्रीम = 15−5 = 10; डाउनस्ट्रीम/अपस्ट्रीम = 2, जो समय अनुपात से मेल खाता है। उत्तर: 5 km/hr
- एक नाव 36 km अपस्ट्रीम 3 घंटे में और वही 36 km डाउनस्ट्रीम 2 घंटे में तय करती है। नाव की शांत पानी में चाल और धारा की चाल ज्ञात करें। हल: अपस्ट्रीम चाल = 36/3 = 12 km/hr। डाउनस्ट्रीम चाल = 36/2 = 18 km/hr। नाव की चाल = (18 + 12)/2 = 15 km/hr। धारा की चाल = (18 − 12)/2 = 3 km/hr। उत्तर: नाव की चाल = 15 km/hr, धारा की चाल = 3 km/hr
- Practice: शांत पानी में एक नाव की चाल 12 km/hr है, और धारा की चाल 3 km/hr है। नाव की डाउनस्ट्रीम और अपस्ट्रीम चाल ज्ञात करें। (उत्तर: डाउनस्ट्रीम = 15 km/hr, अपस्ट्रीम = 9 km/hr)
- Practice: एक नाव डाउनस्ट्रीम 32 km, 4 घंटे में तय कर सकती है। यदि शांत पानी में नाव की चाल 6 km/hr है, तो धारा की चाल ज्ञात करें। (उत्तर: 2 km/hr)
- Practice: एक नाव की डाउनस्ट्रीम चाल 20 km/hr है और अपस्ट्रीम चाल 10 km/hr है। नाव की एक ही दूरी दोनों तरफ तय करने वाले राउंड ट्रिप की औसत चाल ज्ञात करें। (उत्तर: 40/3 ≈ 13.33 km/hr)
- Practice: एक व्यक्ति डाउनस्ट्रीम 15 km/hr और अपस्ट्रीम 9 km/hr की चाल से चलता है। वह किसी स्थान तक जाता है और वापस आता है, कुल 4 घंटे में। दूरी ज्ञात करें। (उत्तर: 22.5 km। d(1/15+1/9) = d(8/45) = 4, तो d = 4×45/8।)
- Practice: एक नाव की शांत पानी में चाल 20 km/hr है। समान दूरी के लिए अपस्ट्रीम जाने में डाउनस्ट्रीम से तीन गुना समय लगता है। धारा की चाल ज्ञात करें। (उत्तर: 10 km/hr। नाव:धारा = (3+1):(3−1) = 4:2 = 2:1, तो धारा = 20/2।)
- Practice: एक नाव 24 km अपस्ट्रीम 4 घंटे में और वही दूरी डाउनस्ट्रीम 2 घंटे में तय करती है। नाव की शांत पानी में चाल और धारा की चाल ज्ञात करें। (उत्तर: नाव = 9 km/hr, धारा = 3 km/hr। अपस्ट्रीम = 6 km/hr, डाउनस्ट्रीम = 12 km/hr।)
- Practice: पिछले प्रश्न की नाव और धारा (डाउनस्ट्रीम 12 km/hr, अपस्ट्रीम 6 km/hr) का उपयोग करते हुए, बराबर दूरी के राउंड ट्रिप के लिए इसकी औसत चाल ज्ञात करें। (उत्तर: 8 km/hr। 2×12×6/(12+6) = 144/18।)

त्वरित दोहराव: यदि शांत पानी में नाव की चाल B है और धारा की चाल S है: धारा की दिशा में (डाउनस्ट्रीम) चाल = B + S। धारा के विपरीत (अपस्ट्रीम) चाल = B − S।; डाउनस्ट्रीम चाल (D) और अपस्ट्रीम चाल (U) दिए जाने पर, आप सूत्र को उल्टा करके नाव और धारा की अपनी चाल निकाल सकते हैं: नाव की चाल = (D + U) / 2, धारा की चाल = (D − U) / 2।; एक बार आपके पास डाउनस्ट्रीम या अपस्ट्रीम चाल आ जाए, तो यह एक सामान्य चाल, समय और दूरी का सवाल है — हमेशा की तरह समय = दूरी / चाल लागू करें।; एक ही दूरी डाउनस्ट्रीम और वापस अपस्ट्रीम तय करने वाले राउंड ट्रिप के लिए, चाल, समय और दूरी वाला वही दो-असमान-चाल औसत-चाल शॉर्टकट उपयोग करें: औसत चाल = 2 × डाउनस्ट्रीम चाल × अपस्ट्रीम चाल / (डाउनस्ट्रीम चाल + अपस्ट्रीम चाल)।; यदि प्रश्न में एक-तरफा डेटा के बजाय राउंड ट्रिप का कुल समय दिया है, तो एक समीकरण बनाएं: कुल समय = दूरी/डाउनस्ट्रीम चाल + दूरी/अपस्ट्रीम चाल, और अज्ञात (आमतौर पर दूरी) के लिए हल करें।; यदि समान दूरी के लिए अपस्ट्रीम में लगने वाला समय डाउनस्ट्रीम समय का कोई गुणज n है, तो डाउनस्ट्रीम चाल = n × अपस्ट्रीम चाल (क्योंकि स्थिर दूरी के लिए समय और चाल व्युत्क्रमानुपाती हैं) — इससे नाव की चाल : धारा की चाल = (n + 1) : (n − 1) मिलता है।; ध्यान से पढ़ें कि "नाव की चाल" का मतलब उसकी शांत पानी की चाल है या पहले से संयुक्त डाउनस्ट्रीम/अपस्ट्रीम चाल — शब्दों से ही तय होता है कि पहले कौन सा सूत्र लागू करें।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/boat-stream/

चेन रूल (Chain Rule)

चेन रूल (Chain Rule) के प्रश्न हल सहित

चेन रूल के प्रश्नों में एक साथ तीन या अधिक संबंधित मात्राएं शामिल होती हैं (श्रमिक, दिन, घंटे; या पुरुष और दिन) — तरीका है हर जोड़े के लिए एक प्रत्यक्ष या व्युत्क्रम अनुपात स्थापित करना और उन्हें एक साथ जोड़ना, यह अनुमान लगाना नहीं कि किस तरफ गुणा करें। इस पेज में यह तरीका, राशन/भोजन-अवधि वाले प्रश्न, और जब कुल काम भी बदल जाए वाली स्थितियां शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। पहचानें कि क्या हर जोड़ी की मात्राएं प्रत्यक्ष रूप से आनुपातिक हैं (दोनों एक साथ बढ़ते हैं, जैसे लागत और मात्रा) या व्युत्क्रम रूप से आनुपातिक हैं (एक बढ़ने पर दूसरा घटता है, जैसे एक निश्चित काम के लिए श्रमिक और दिन)। अधिक श्रमिक → कम दिन चाहिए (व्युत्क्रम)। प्रति दिन अधिक घंटे → कम दिन चाहिए (व्युत्क्रम)। अधिक काम करना है → अधिक दिन चाहिए (प्रत्यक्ष)। अज्ञात को इस तरह स्थापित करें: नया मान = पुराना मान × (वह अनुपात जो हर संबंध के लिए समझ में आता है) — व्युत्क्रम संबंध के लिए, अनुपात पुराना/नया है; प्रत्यक्ष संबंध के लिए, यह नया/पुराना है। हर प्रासंगिक अनुपात को एक-एक जोड़ी हल करने के बजाय एक ही समीकरण में एक साथ जोड़ें — इससे गोलाई की त्रुटियां और उलझे हुए मध्यवर्ती चरण टल जाते हैं। राशन/भोजन-अवधि वाले प्रश्न असल में छुपा हुआ व्युत्क्रम-अनुपात चेन रूल हैं: एक निश्चित भोजन भंडार को बांटने वाले अधिक लोग होने पर वह कम दिन चलता है। यदि बीच में संख्या बदल जाए, तो चरणों में बांटें — पहले देखें बदलाव से पहले कितना भंडार उपयोग हुआ, कितना बचा, फिर उसे नई संख्या से भाग दें। यदि कुल काम भी बदल जाए (केवल श्रमिक/दिन/घंटे नहीं) — जैसे एक लंबी दीवार, या बड़ा काम — तो चेन में एक और प्रत्यक्ष-अनुपात कारक जोड़ें: (नया काम / पुराना काम), क्योंकि बाकी सब बराबर होने पर अधिक काम में अधिक दिन लगते हैं।

उदाहरण

- यदि 15 श्रमिक एक दीवार को 8 घंटे प्रतिदिन काम करते हुए 12 दिनों में बना सकते हैं, तो 18 श्रमिक उसी दीवार को 10 घंटे प्रतिदिन काम करते हुए कितने दिनों में बनाएंगे? हल: अधिक श्रमिक → कम दिन (व्युत्क्रम): 15/18 से गुणा करें। प्रति दिन अधिक घंटे → कम दिन (व्युत्क्रम): 8/10 से गुणा करें। दिन = 12 × (15/18) × (8/10) = 12 × (5/6) × (4/5) = 8 दिन। उत्तर: 8 दिन
- 8 पेनों की कीमत 6 पेंसिलों की कीमत के बराबर है। यदि 10 पेंसिलों की कीमत ₹150 है, तो 20 पेनों की कीमत ज्ञात करें। हल: 1 पेंसिल की कीमत = 150 / 10 = ₹15, तो 6 पेंसिलों की कीमत = 6 × 15 = ₹90। 8 पेनों की कीमत इसके बराबर है: 8 पेन = ₹90, तो 1 पेन = 90/8 = ₹11.25। 20 पेनों की कीमत = 20 × 11.25 = ₹225। उत्तर: ₹225
- 36 पुरुष एक काम को 18 दिनों में पूरा कर सकते हैं। 27 पुरुष उसी काम को कितने दिनों में पूरा करेंगे? हल: अधिक पुरुष → कम दिन (व्युत्क्रम अनुपात): दिन = 36 × 18 / 27। = 648 / 27 = 24 दिन। उत्तर: 24 दिन
- एक कार 60 km/hr की गति से एक निश्चित दूरी 5 घंटे में तय करती है। यदि गति बढ़ाकर 75 km/hr कर दी जाए, तो वही दूरी तय करने में लगने वाला समय ज्ञात करें। हल: दूरी स्थिर रहती है, और गति व समय व्युत्क्रमानुपाती हैं: समय = (5 × 60) / 75। = 300 / 75 = 4 घंटे। उत्तर: 4 घंटे
- 500 सैनिकों की एक छावनी के पास 30 दिनों का भोजन है। 10 दिनों बाद, 100 और सैनिक शामिल हो जाते हैं। बचा हुआ भोजन कितने और दिन चलेगा? हल: कुल भोजन भंडार = 500 × 30 = 15,000 "व्यक्ति-दिन"। पहले 10 दिनों में उपयोग = 500 × 10 = 5,000 व्यक्ति-दिन। बचा = 15,000 − 5,000 = 10,000 व्यक्ति-दिन। नई संख्या = 500 + 100 = 600। बचे दिन = 10,000 / 600 ≈ 16.67 दिन। उत्तर: ≈ 16.67 दिन (16 दिन 16 घंटे)
- यदि 20 पुरुष 50 मीटर लंबी दीवार 12 दिनों में बना सकते हैं, तो 15 पुरुष 75 मीटर लंबी दीवार कितने दिनों में बनाएंगे (समान कार्य-दर पर)? हल: अनुपातों को जोड़ें: कम पुरुष → अधिक दिन (व्युत्क्रम, 20/15 से गुणा करें); अधिक दीवार बनानी है → अधिक दिन (प्रत्यक्ष, 75/50 से गुणा करें)। दिन = 12 × (20/15) × (75/50) = 12 × (4/3) × (3/2) = 12 × 2 = 24 दिन। उत्तर: 24 दिन
- यदि 6 पुरुष 5 दिनों में ₹9,000 कमा सकते हैं, तो 8 पुरुष 10 दिनों में कितना कमाएंगे, समान दैनिक मज़दूरी दर पर? हल: कमाई पुरुषों की संख्या और दिनों दोनों के साथ प्रत्यक्ष रूप से बढ़ती है। नई कमाई = 9,000 × (8/6) × (10/5) = 9,000 × (4/3) × 2 = 9,000 × 8/3 = ₹24,000। उत्तर: ₹24,000
- Practice: 20 श्रमिक एक दीवार को 6 घंटे प्रतिदिन काम करते हुए 15 दिनों में बना सकते हैं। 15 श्रमिक उसी दीवार को 8 घंटे प्रतिदिन काम करते हुए कितने दिनों में बनाएंगे? (उत्तर: 15 दिन)
- Practice: 12 नोटबुक की कीमत ₹180 है। 20 नोटबुक की कीमत ज्ञात करें। (उत्तर: ₹300)
- Practice: 24 पुरुष एक काम को 20 दिनों में पूरा कर सकते हैं। 30 पुरुष उसी काम को कितने दिनों में पूरा करेंगे? (उत्तर: 16 दिन)
- Practice: एक जहाज़ के पास 400 यात्रियों के लिए 60 दिनों का भोजन है। 15 दिनों बाद, 100 यात्री जहाज़ छोड़ देते हैं। बचा हुआ भोजन कितने और दिन चलेगा? (उत्तर: 60 दिन। भंडार = 24,000 व्यक्ति-दिन; उपयोग = 6,000; बचा 18,000 ÷ 300 यात्री।)
- Practice: यदि 25 पुरुष 40 मीटर लंबी दीवार 16 दिनों में बना सकते हैं, तो 20 पुरुष 60 मीटर लंबी दीवार कितने दिनों में बनाएंगे? (उत्तर: 30 दिन। 16 × (25/20) × (60/40) = 16 × 1.25 × 1.5।)
- Practice: यदि 5 पुरुष 8 दिनों में ₹6,000 कमा सकते हैं, तो 10 पुरुष 6 दिनों में कितना कमाएंगे? (उत्तर: ₹9,000। 6,000 × (10/5) × (6/8)।)
- Practice: 15 श्रमिक एक काम को 6 घंटे प्रतिदिन काम करते हुए 8 दिनों में पूरा कर सकते हैं। 12 श्रमिक 10 घंटे प्रतिदिन काम करते हुए कितने दिनों में पूरा करेंगे? (उत्तर: 6 दिन। 8 × (15/12) × (6/10)।)

त्वरित दोहराव: पहचानें कि क्या हर जोड़ी की मात्राएं प्रत्यक्ष रूप से आनुपातिक हैं (दोनों एक साथ बढ़ते हैं, जैसे लागत और मात्रा) या व्युत्क्रम रूप से आनुपातिक हैं (एक बढ़ने पर दूसरा घटता है, जैसे एक निश्चित काम के लिए श्रमिक और दिन); अधिक श्रमिक → कम दिन चाहिए (व्युत्क्रम)। प्रति दिन अधिक घंटे → कम दिन चाहिए (व्युत्क्रम)। अधिक काम करना है → अधिक दिन चाहिए (प्रत्यक्ष); अज्ञात को इस तरह स्थापित करें: नया मान = पुराना मान × (वह अनुपात जो हर संबंध के लिए समझ में आता है) — व्युत्क्रम संबंध के लिए, अनुपात पुराना/नया है; प्रत्यक्ष संबंध के लिए, यह नया/पुराना है; हर प्रासंगिक अनुपात को एक-एक जोड़ी हल करने के बजाय एक ही समीकरण में एक साथ जोड़ें — इससे गोलाई की त्रुटियां और उलझे हुए मध्यवर्ती चरण टल जाते हैं; राशन/भोजन-अवधि वाले प्रश्न असल में छुपा हुआ व्युत्क्रम-अनुपात चेन रूल हैं: एक निश्चित भोजन भंडार को बांटने वाले अधिक लोग होने पर वह कम दिन चलता है। यदि बीच में संख्या बदल जाए, तो चरणों में बांटें — पहले देखें बदलाव से पहले कितना भंडार उपयोग हुआ, कितना बचा, फिर उसे नई संख्या से भाग दें; यदि कुल काम भी बदल जाए (केवल श्रमिक/दिन/घंटे नहीं) — जैसे एक लंबी दीवार, या बड़ा काम — तो चेन में एक और प्रत्यक्ष-अनुपात कारक जोड़ें: (नया काम / पुराना काम), क्योंकि बाकी सब बराबर होने पर अधिक काम में अधिक दिन लगते हैं।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/chain-rule/

ज्यामिति: वृत्त — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

ज्यामिति: वृत्त — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

वृत्त के केंद्र से किसी जीवा पर डाला गया लंब उस जीवा को समद्विभाजित करता है, और एक ही वृत्त में समान जीवाओं की केंद्र से लंब दूरी समान होती है। केंद्र पर बना कोण उसी चाप पर बने अंतःस्थ कोण का दोगुना होता है, और एक ही वृत्तखंड से एक ही जीवा पर बने अंतःस्थ कोण समान होते हैं। चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है। स्पर्श बिंदु पर त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंबवत होती है, और एक बाहरी बिंदु से एक ही वृत्त की स्पर्श रेखा खंडों की लंबाई समान होती है। केंद्र दूरी d और त्रिज्याओं R और r वाले वृत्तों के लिए, एक सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा खंड की लंबाई $\sqrt{(d^2 - (R - r)^2)}$ होती है, जबकि एक तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा खंड की लंबाई $\sqrt{(d^2 - (R + r)^2)}$ होती है जब बताया गया अलग-वृत्त विन्यास संभव हो।

दोनों उभयनिष्ठ-स्पर्श रेखा सूत्रों को आसानी से मिलाया जा सकता है, तो हर एक के पीछे का ज्यामितीय कारण याद रखें: एक सीधी (direct) स्पर्श रेखा दोनों वृत्तों को एक ही ओर स्पर्श करती है (जैसे दो वृत्त साथ-साथ रखे हों और ऊपर एक स्पर्श रेखा हो), तो संबंधित समकोण त्रिभुज की भुजा त्रिज्याओं का अंतर (R − r) है। एक तिर्यक (transverse) स्पर्श रेखा वृत्तों के बीच से गुजरती है (एक को ऊपर और दूसरे को नीचे छूते हुए), तो संबंधित भुजा त्रिज्याओं का योग (R + r) है - और यह केवल तभी मौजूद होती है जब वृत्त एक-दूसरे को न काटें।

दो-स्पर्शरेखा-समान-लंबाई तथ्य (एक बाहरी बिंदु से स्पर्श रेखा खंड समान होते हैं) अक्सर उन वृत्त प्रश्नों को खोलने की मुख्य कुंजी है जिनमें एक बाहरी बिंदु एक वृत्त को दो बार छूता है - इसे तब खोजें जब किसी एक बाहरी बिंदु से एक ही वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएं खींची गई हों।

उदाहरण

- एक वृत्त की त्रिज्या 10 cm है। एक जीवा केंद्र से 6 cm लंब दूरी पर है। पूरी जीवा की लंबाई cm में ज्ञात करें। हल: लंब जीवा को समद्विभाजित करता है। आधी-जीवा^{2} = $10^2 - 6^2 = 64$, तो आधी-जीवा = 8 cm। दोगुना करने पर 16 cm मिलता है।
- एक लघु चाप AB केंद्र पर 64° का कोण बनाता है। बिंदु C दीर्घ चाप AB पर स्थित है। कोण ACB डिग्री में ज्ञात करें। हल: कोण ACB लघु चाप AB को अंतःस्थ करता है। अंतःस्थ कोण उसी चाप पर केंद्रीय कोण का आधा होता है, तो ACB = 64/2 = 32°।
- दो असंयुक्त वृत्तों की त्रिज्याएं 16 और 6 cm हैं और केंद्र दूरी 26 cm है। सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा पर स्पर्श बिंदुओं के बीच लंबाई cm में ज्ञात करें। हल: सीधी स्पर्श रेखा 26 कर्ण और लंब भुजा R − r = 10 वाला समकोण त्रिभुज देती है। स्पर्श रेखा लंबाई = $\sqrt{(26^2 - 10^2)} = 24$ cm।
- 8 cm और 4 cm त्रिज्या वाले दो वृत्तों के केंद्र 15 cm दूर हैं, और वे एक-दूसरे को नहीं काटते। तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई ज्ञात करें। हल: तिर्यक स्पर्श रेखा त्रिज्याओं के योग को संबंधित भुजा के रूप में उपयोग करती है: लंबाई = $\sqrt{(15^2 - (8+4)^2)} = \sqrt{(225-144)} = \sqrt{81} = 9$ cm।
- एक बाहरी बिंदु P से, 5 cm त्रिज्या वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा खींची जाती है, जहां P केंद्र से 13 cm दूर है। स्पर्श रेखा की लंबाई ज्ञात करें। हल: स्पर्श बिंदु पर त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंबवत होती है, जो 13 कर्ण और एक भुजा 5 वाला समकोण त्रिभुज बनाती है। स्पर्श रेखा लंबाई = $\sqrt{(13^2-5^2)} = \sqrt{(169-25)} = \sqrt{144} = 12$ cm - शास्त्रीय 5-12-13 त्रिक।
- ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें कोण A = 70° है। कोण C ज्ञात करें। हल: चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है, तो कोण C = 180° − 70° = 110°।

त्वरित दोहराव: केंद्र से लंब जीवा को समद्विभाजित करता है। केंद्रीय कोण = 2 × उसी चाप पर अंतःस्थ कोण। चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180°। स्पर्श रेखा ⊥ स्पर्श बिंदु पर त्रिज्या; एक बाहरी बिंदु से दो स्पर्श रेखाएं समान हैं। सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (R−r) उपयोग करती है; तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (R+r) उपयोग करती है, केवल तभी जब वृत्त अलग हों।

ज्यामिति: रेखाएं, कोण और त्रिभुज

ज्यामिति: रेखाएँ और त्रिभुज — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

एक सीधी रेखा पर सटे हुए कोणों का योग 180° होता है, शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं, और एक तिर्यक रेखा द्वारा काटी गई समांतर रेखाएं समान संगत और एकांतर अंतः कोण बनाती हैं। एक त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 180° होता है, और एक बाह्य कोण दो दूरस्थ अंतः कोणों के योग के बराबर होता है।

सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएं और कोण समान होते हैं, जबकि समरूप त्रिभुजों में एक सामान्य भुजा स्केल और क्षेत्रफलों के लिए उस स्केल का वर्ग होता है। एक समकोण त्रिभुज $a^2 + b^2 = c^2$ को संतुष्ट करता है जहां c कर्ण है, और इसके कर्ण का मध्यबिंदु तीनों शीर्षों से समान दूरी पर होता है। एक शीर्षलंब विपरीत भुजा पर लंबवत होता है, एक माध्यिका एक शीर्ष को विपरीत मध्यबिंदु से जोड़ती है, और एक आंतरिक कोण समद्विभाजक विपरीत भुजा को आसन्न भुजाओं के अनुपात में विभाजित करता है। केन्द्रक हर माध्यिका को शीर्ष से 2:1 में विभाजित करता है, अंतःकेंद्र कोण-समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन है, परिकेंद्र लंब-समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन है, और लंबकेंद्र शीर्षलंबों का प्रतिच्छेदन है।

पाइथागोरस संबंध उल्टा भी काम करता है (विलोम): यदि किसी त्रिभुज की तीन भुजाएं $a^2 + b^2 = c^2$ को संतुष्ट करती हैं, तो त्रिभुज अनिवार्य रूप से सबसे लंबी भुजा c के सामने वाले शीर्ष पर समकोण होता है - बिना किसी कोण जानकारी के तीन दी गई भुजा लंबाइयां समकोण त्रिभुज बनाती हैं या नहीं, यह जांचने का एक तेज़ तरीका।

कोण समद्विभाजक प्रमेय एक ठोस अनुपात देता है: यदि शीर्ष A से समद्विभाजक विपरीत भुजा BC को बिंदु D पर मिलता है, तो BD:DC = AB:AC - बिंदु विपरीत भुजा को ठीक उसी अनुपात में विभाजित करता है जैसे दो आसन्न भुजाएं, जो कई "यह लंबाई ज्ञात करें" प्रश्नों को एक सीधे अनुपात विभाजन में बदल देता है।

उदाहरण

- किरणें OA और OB एक सीधी रेखा बनाती हैं। किरण OC इसके एक ओर है, कोण AOC = 43° के साथ। कोण COB डिग्री में ज्ञात करें। हल: दोनों सटे कोण 180° का सरल कोण बनाते हैं। तो कोण COB = 180 − 43 = 137°।
- त्रिभुज ABC और DEF समरूप हैं जिनकी संगत भुजाओं का अनुपात ABC:DEF = 2:3 है। यदि BC = 7 cm है और EF के संगत है, तो EF cm में ज्ञात करें। हल: ABC से DEF तक भुजा गुणक 3/2 है। तो EF = 7 × 3/2 = 10.5 cm।
- I त्रिभुज ABC का अंतःकेंद्र है और कोण A = 42° है। छोटा कोण BIC डिग्री में ज्ञात करें। हल: त्रिभुज BIC में, अन्य दो कोण B/2 और C/2 हैं। उनका योग (180 − 42)/2 है, तो BIC = 180 − (180 − 42)/2 = 111°।
- एक त्रिभुज की भुजाएं 9 cm, 12 cm, और 15 cm हैं। निर्धारित करें कि यह समकोण है या नहीं। हल: सबसे लंबी भुजा को कर्ण मानकर पाइथागोरस संबंध जांचें: $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$। चूंकि यह सत्य है, त्रिभुज समकोण है, 15 cm भुजा के सामने समकोण है।
- एक त्रिभुज की माध्यिका की लंबाई 12 cm है। केन्द्रक से शीर्ष तक, और केन्द्रक से विपरीत भुजा के मध्यबिंदु तक की दूरी ज्ञात करें। हल: केन्द्रक हर माध्यिका को शीर्ष से 2:1 में विभाजित करता है, तो शीर्ष-से-केन्द्रक = (2/3)×12 = 8 cm, और केन्द्रक-से-मध्यबिंदु = (1/3)×12 = 4 cm।
- त्रिभुज ABC में, AB = 6 cm और AC = 9 cm है। A से आंतरिक समद्विभाजक BC को D पर मिलता है, जहां BC = 10 cm है। BD और DC ज्ञात करें। हल: कोण समद्विभाजक प्रमेय से, BD:DC = AB:AC = 6:9 = 2:3। BC = 10 cm को इस अनुपात में विभाजित करने पर: BD = (2/5)×10 = 4 cm, DC = (3/5)×10 = 6 cm।
- एक त्रिभुज के दो दूरस्थ अंतः कोण 50° और 70° हैं। तीसरे शीर्ष पर बाह्य कोण ज्ञात करें। हल: एक बाह्य कोण दूरस्थ अंतः कोणों के योग के बराबर होता है: 50° + 70° = 120°।

> **त्वरित दोहराव:** सीधी रेखा कोणों का योग 180°; शीर्षाभिमुख कोण समान; त्रिभुज कोणों का योग 180°; बाह्य कोण = दूरस्थ अंतः कोणों का योग। समरूप त्रिभुज: भुजाएं रैखिक रूप से स्केल होती हैं, क्षेत्रफल वर्ग से स्केल होते हैं। पाइथागोरस विलोम: $a^2+b^2=c^2$ का अर्थ है त्रिभुज c के सामने समकोण है। कोण समद्विभाजक प्रमेय: BD:DC = AB:AC। केन्द्रक हर माध्यिका को शीर्ष से 2:1 में विभाजित करता है।

ज्यामिति: रेखाएं, कोण और त्रिभुज के प्रश्न हल सहित

ज्यामिति का यह हिस्सा कुछ निश्चित तथ्यों पर चलता है — त्रिभुज के कोणों का योग, एक बाह्य कोण उसके आर-पार वाले दो आंतरिक कोणों से कैसे संबंधित है, और समांतर रेखाओं को काटने वाली एक तिर्यक रेखा (transversal) कैसे व्यवहार करती है। इस पेज में यह सब, त्रिभुज असमानता, और समद्विबाहु/समबाहु कोण गुणों के साथ, कई हल किए गए उदाहरणों में दिया गया है। किसी भी त्रिभुज के कोणों का योग हमेशा 180° होता है। कोई भी दो कोण दिए जाने पर, तीसरा कोण पाने के लिए उनके योग को 180° से घटाएं। जब कोण एक अनुपात के रूप में दिए जाएं (जैसे 2:3:4), तो हर भाग को एक चर दें (2x, 3x, 4x), उनके योग को 180° के बराबर रखें, x के लिए हल करें, फिर हर वास्तविक कोण पाने के लिए वापस गुणा करें। एक त्रिभुज का बाह्य कोण (एक भुजा को बढ़ाकर बनाया गया) उसके आसन्न न होने वाले दो आंतरिक कोणों के योग के बराबर होता है — यह पहले तीसरे आंतरिक कोण को निकालकर 180° से घटाने से तेज़ है। एक बाह्य कोण और उसका आसन्न आंतरिक कोण हमेशा 180° जोड़ते हैं (वे एक सीधी रेखा बनाते हैं) — यह तब उपयोगी है जब कोई प्रश्न दोनों को मिलाता है। त्रिभुज असमानता: त्रिभुज की किसी भी दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होना चाहिए। इसका उपयोग यह जांचने के लिए करें कि दी गई तीन लंबाइयां वास्तव में त्रिभुज बना भी सकती हैं या नहीं, कोण संबंधी कार्य से पहले। एक समद्विबाहु त्रिभुज में, दो बराबर भुजाओं के सामने वाले दो कोण स्वयं बराबर होते हैं; एक समबाहु त्रिभुज में, तीनों भुजाएं बराबर होती हैं और तीनों कोण 60° होते हैं। जब एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटती है: संगत कोण बराबर होते हैं, एकांतर कोण बराबर होते हैं, और सह-अंतःस्थ (allied) कोण 180° जोड़ते हैं। ये तीन तथ्य आमतौर पर समांतर-रेखा आकृति में अज्ञात कोण निकालने देते हैं।

उदाहरण

- त्रिभुज ABC में, कोण A = 50° और कोण B = 70° है। कोण C ज्ञात करें। हल: त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180° होता है: कोण C = 180° − 50° − 70° = 60°। उत्तर: 60°
- एक त्रिभुज के दो कोण 2:3 के अनुपात में हैं, और तीसरा कोण 100° है। दोनों कोण ज्ञात करें। हल: दोनों कोण 2x और 3x मानें: 2x + 3x + 100° = 180°, तो 5x = 80°, जिससे x = 16°। दोनों कोण हैं 2(16°) = 32° और 3(16°) = 48°। उत्तर: 32° और 48°

- एक त्रिभुज का बाह्य कोण 110° है, और आंतरिक विपरीत कोणों में से एक 40° है। दूसरा आंतरिक विपरीत कोण ज्ञात करें। हल: बाह्य कोण दो असंलग्न आंतरिक कोणों के योग के बराबर होता है: 110° = 40° + (दूसरा कोण), तो दूसरा कोण = 70°। उत्तर: 70°
- एक त्रिभुज में, तीनों कोण 1:2:3 के अनुपात में हैं। सबसे बड़ा कोण ज्ञात करें। हल: कोण x, 2x और 3x मानें: x + 2x + 3x = 180°, तो 6x = 180°, जिससे x = 30°। सबसे बड़ा कोण है 3(30°) = 90°। उत्तर: 90°
- क्या 4 cm, 5 cm और 10 cm भुजाओं वाला त्रिभुज बन सकता है? हल: त्रिभुज असमानता जांचें: दो छोटी भुजाओं का योग सबसे बड़ी भुजा से अधिक होना चाहिए। 4 + 5 = 9, जो 10 से कम है। असमानता पूरी नहीं होती, तो ऐसा त्रिभुज संभव नहीं है। उत्तर: नहीं — 4 + 5 = 9 < 10, तो त्रिभुज असमानता पूरी नहीं होती
- एक समद्विबाहु त्रिभुज में, शीर्ष कोण 40° है। दोनों आधार कोण ज्ञात करें। हल: दोनों आधार कोण बराबर हैं। उनका संयुक्त माप = 180° − 40° = 140°। हर आधार कोण = 140° / 2 = 70°। उत्तर: हर एक 70°
- दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है। बने कोणों में से एक 70° है। (a) दूसरी समांतर रेखा पर उसका संगत कोण, और (b) उस संगत कोण से सटा सह-अंतःस्थ कोण ज्ञात करें। हल: (a) संगत कोण बराबर होते हैं, तो संगत कोण भी 70° है। (b) सह-अंतःस्थ कोण 180° जोड़ते हैं, तो सटा कोण = 180° − 70° = 110°। उत्तर: (a) 70° (b) 110°
- Practice: त्रिभुज PQR में, कोण P = 65° और कोण Q = 55° है। कोण R ज्ञात करें। (उत्तर: 60°)
- Practice: एक त्रिभुज के दो कोण 3:4 के अनुपात में हैं, और तीसरा कोण 40° है। दोनों कोण ज्ञात करें। (उत्तर: 60° और 80°)
- Practice: एक त्रिभुज का बाह्य कोण 125° है, और आंतरिक विपरीत कोणों में से एक 55° है। दूसरा आंतरिक विपरीत कोण ज्ञात करें। (उत्तर: 70°)
- Practice: क्या 6 cm, 7 cm और 14 cm भुजाओं वाला त्रिभुज बन सकता है? (उत्तर: नहीं। 6 + 7 = 13 < 14, तो त्रिभुज असमानता पूरी नहीं होती।)
- Practice: एक समद्विबाहु त्रिभुज में, शीर्ष कोण 50° है। हर आधार कोण ज्ञात करें। (उत्तर: हर एक 65°। (180° − 50°) / 2।)
- Practice: दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है। बना एक कोण 110° है। इसका एकांतर कोण और सह-अंतःस्थ कोण ज्ञात करें। (उत्तर: एकांतर = 110° (बराबर); सह-अंतःस्थ = 70° (180° − 110°)।)
- Practice: एक त्रिभुज के कोण 2:3:5 के अनुपात में हैं। तीनों कोण ज्ञात करें। (उत्तर: 36°, 54° और 90°। 10x = 180° से x = 18°।)

> **त्वरित दोहराव:** किसी भी त्रिभुज के कोणों का योग हमेशा 180° होता है। कोई भी दो कोण दिए जाने पर, तीसरा कोण पाने के लिए उनके योग को 180° से घटाएं।; जब कोण एक अनुपात के रूप में दिए जाएं (जैसे 2:3:4), तो हर भाग को एक चर दें (2x, 3x, 4x), उनके योग को 180° के बराबर रखें, x के लिए हल करें, फिर हर वास्तविक कोण पाने के लिए वापस गुणा करें।; एक त्रिभुज का बाह्य कोण (एक भुजा को बढ़ाकर बनाया गया) उसके आसन्न न होने वाले दो आंतरिक कोणों के योग के बराबर होता है — यह पहले तीसरे आंतरिक कोण को निकालकर 180° से घटाने से तेज़ है।; एक बाह्य कोण और उसका आसन्न आंतरिक कोण हमेशा 180° जोड़ते हैं (वे एक सीधी रेखा बनाते हैं) — यह तब उपयोगी है जब कोई प्रश्न दोनों को मिलाता है।; त्रिभुज असमानता: त्रिभुज की किसी भी दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होना चाहिए। इसका उपयोग यह जांचने के लिए करें कि दी गई तीन लंबाइयां वास्तव में त्रिभुज बना भी सकती हैं या नहीं, कोण संबंधी कार्य से पहले।; एक समद्विबाहु त्रिभुज में, दो बराबर भुजाओं के सामने वाले दो कोण स्वयं बराबर होते हैं; एक समबाहु त्रिभुज में, तीनों भुजाएं बराबर होती हैं और तीनों कोण 60° होते हैं।; जब एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटती है: संगत कोण बराबर होते हैं, एकांतर कोण बराबर होते हैं, और सह-अंतःस्थ (allied) कोण 180° जोड़ते हैं। ये तीन तथ्य आमतौर पर समांतर-रेखा आकृति में अज्ञात कोण निकालने देते हैं।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/geometry-lines-triangles/

ऊंचाई और दूरी (Height and Distance)

ऊँचाई और दूरी — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

उन्नयन कोण (angle of elevation) पर्यवेक्षक की क्षैतिज दृष्टि रेखा से ऊपर की ओर मापा जाता है, और अवनमन कोण (angle of depression) उससे नीचे की ओर मापा जाता है। समतल ज़मीन और एक ऊर्ध्वाधर वस्तु के साथ, tanθ पर्यवेक्षक की आंख से लक्ष्य तक ऊर्ध्वाधर ऊंचाई को क्षैतिज दूरी से भाग देने के बराबर होता है। जब पूछी गई ऊंचाई ज़मीन से मापी जाए, तो पर्यवेक्षक की आंख की ऊंचाई जोड़ें। मानक मान tan30° = 1/√3, tan45° = 1 और tan60° = √3 सामान्य समकोण त्रिभुज विन्यासों को जोड़ते हैं। दो प्रेक्षणों के लिए, हर स्थिति के लिए एक समीकरण लिखें और स्थितियों के बीच बताई गई दूरी को सही समान-पक्ष या विपरीत-पक्ष व्यवस्था के साथ उपयोग करें। एक छाया और ऊर्ध्वाधर वस्तु एक और समकोण त्रिभुज बनाते हैं, जबकि एक झुकी सीढ़ी sine उपयोग करती है जब उसकी लंबाई कर्ण हो।

शास्त्रीय "दो-स्थिति" प्रश्न - जहां पर्यवेक्षक के वस्तु की ओर या दूर चलने पर उन्नयन कोण बदलता है - हर स्थिति के लिए एक tan समीकरण चाहिए, दोनों एक ही अज्ञात ऊंचाई को संदर्भित करते हुए, ज्ञात क्षैतिज दूरियों के साथ जिनका अंतर बताई गई चलने की दूरी के बराबर हो। दोनों समीकरणों को एक साथ हल करें दोनों क्षैतिज दूरियों को ऊंचाई के रूप में व्यक्त करके, फिर उनके अंतर का उपयोग करके ऊंचाई सीधे निर्धारित करें।

उदाहरण

- समतल ज़मीन पर, ज़मीनी स्तर पर एक पर्यवेक्षक एक ऊर्ध्वाधर मीनार के आधार से 12 m दूर खड़ा है। इसकी चोटी का उन्नयन कोण 45° है। मीनार की ऊंचाई मीटर में ज्ञात करें। हल: ऊंचाई/क्षैतिज दूरी = tan45° = 1। तो ऊंचाई = 12 × 1 = 12 m।
- एक ऊर्ध्वाधर 21 m मीनार की चोटी से, समतल ज़मीन पर एक बिंदु का अवनमन कोण 45° है। उस बिंदु से मीनार के आधार तक क्षैतिज दूरी मीटर में ज्ञात करें। हल: ज़मीनी बिंदु मीनार को 45° उन्नयन पर देखता है क्योंकि क्षैतिज रेखाएं समांतर हैं। तो 21/दूरी = tan45° = 1, जिससे दूरी 21 m मिलती है।

- $4\sqrt{2}$ m लंबी एक सीधी सीढ़ी समतल ज़मीन पर एक ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे टिकी है, ज़मीन से 45° का कोण बनाते हुए। दीवार पर पहुंची ऊंचाई मीटर में ज्ञात करें। हल: सीढ़ी कर्ण है। ऊर्ध्वाधर ऊंचाई = $4\sqrt{2} \times \sin 45° = 4\sqrt{2}/\sqrt{2} = 4$ m।
- एक पर्यवेक्षक एक मीनार की ओर 40 m चलता है, और इसकी चोटी का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात करें। हल: मान लें ऊंचाई = h। दूर वाली स्थिति पर, $h = d_1 \times \tan 30°$ तो $d_1 = h\sqrt{3}$। नज़दीक वाली स्थिति पर, $h = d_2 \times \tan 60°$ तो $d_2 = h/\sqrt{3}$। चूंकि $d_1 - d_2 = 40$: $h\sqrt{3} - h/\sqrt{3} = 40 \rightarrow h(3-1)/\sqrt{3} = 40 \rightarrow h = 20\sqrt{3} \approx 34.64$ m।
- 100 m ऊंची एक चट्टान की चोटी से, चट्टान के आधार के साथ एक रेखा में स्थित दो नावों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं, एक ही ओर। नावों के बीच की दूरी ज्ञात करें। हल: नज़दीक वाली नाव की क्षैतिज दूरी $100/\tan 45° = 100$ m है। दूर वाली नाव की दूरी $100/\tan 30° = 100\sqrt{3}$ m है। नावों के बीच दूरी = $100\sqrt{3} - 100 = 100(\sqrt{3}-1) \approx 73.2$ m।

> **त्वरित दोहराव:** $\tan\theta$ = (ऊर्ध्वाधर ऊंचाई)/(क्षैतिज दूरी), पर्यवेक्षक की आंख के स्तर से; ज़मीन-स्तर ऊंचाई पूछे जाने पर आंख की ऊंचाई जोड़ें। $\tan 30° = 1/\sqrt{3}$, $\tan 45° = 1$, $\tan 60° = \sqrt{3}$। दो-स्थिति प्रश्न: हर स्थिति के लिए एक ही अज्ञात ऊंचाई के साथ एक tan समीकरण लिखें, और ज्ञात चलने की दूरी को दोनों क्षैतिज दूरियों के अंतर के रूप में उपयोग करें। सीढ़ी प्रश्न: ऊंचाई = लंबाई × $\sin\theta$ (सीढ़ी कर्ण है)।

ऊंचाई और दूरी (Height and Distance) के प्रश्न हल सहित

इस विषय में लगभग हर प्रश्न एक समकोण त्रिभुज और तीन मानक कोणों में से एक — 30°, 45°, या 60° — तक सिमट जाता है, तो असली कौशल सही त्रिभुज बनाना और सही त्रिकोणमितीय अनुपात चुनना है, कई सूत्र याद रखना नहीं। इस पेज में यह मुख्य तरीका, दो-स्थिति (चलते पर्यवेक्षक) वाले प्रश्न, और "मीनार पर झंडा" वाला दो-त्रिभुज पैटर्न शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। तीन मानक कोण और उनके टैंजेंट मान (यहां सबसे ज़्यादा उपयोग होने वाला अनुपात): $\tan 30° = 1/\sqrt{3}$, $\tan 45° = 1$, $\tan 60° = \sqrt{3}$। उन्नयन कोण (angle of elevation) क्षैतिज रेखा से ऊपर की ओर मापा जाता है (किसी चीज़ को ऊपर देखते हुए); अवनमन कोण (angle of depression) क्षैतिज रेखा से नीचे की ओर मापा जाता है (किसी चीज़ को नीचे देखते हुए) — दोनों क्षैतिज रेखा से मापे जाते हैं, ज़मीन या वस्तु से नहीं। tan(कोण) = सम्मुख भुजा / आसन्न भुजा, जहां "सम्मुख" ऊंचाई (ऊर्ध्वाधर) है और "आसन्न" आधार से क्षैतिज दूरी है — पहले त्रिभुज बनाएं, ऊंचाई और दूरी को लेबल करें, फिर tan लागू करें। एक तिरछी रेखा (जैसे सीढ़ी या तार, जो कर्ण होती है) के लिए, tan के बजाय sin या cos का उपयोग करें: जब कोण ज़मीन के साथ हो तो cos(कोण) = आसन्न/कर्ण, sin(कोण) = सम्मुख/कर्ण। यदि पर्यवेक्षक आधार की ओर या उससे दूर एक ज्ञात दूरी चलने पर उन्नयन कोण बदल जाए, तो हर स्थिति पर अलग tan समीकरण बनाएं (दोनों एक ही अज्ञात ऊंचाई साझा करते हुए), फिर दोनों को साथ हल करें। "इमारत के ऊपर झंडे/एंटीना" वाले प्रश्न के लिए, जहां एक ही बिंदु से झंडे के नीचे और ऊपर दोनों के उन्नयन कोण दिए हों, एक ही क्षैतिज दूरी साझा करने वाले दो समकोण त्रिभुज बनाएं, हर ऊंचाई निकालें, और झंडे की अपनी लंबाई पाने के लिए घटाएं।

उदाहरण

- एक खंभे की छाया की लंबाई $10\sqrt{3}$ मीटर है जब सूर्य का उन्नयन कोण 30° है। खंभे की ऊंचाई ज्ञात करें। हल: $\tan(30°)$ = ऊंचाई / छाया की लंबाई, तो ऊंचाई = छाया की लंबाई × $\tan(30°)$। $\tan(30°) = 1/\sqrt{3}$, तो ऊंचाई = $10\sqrt{3} \times (1/\sqrt{3}) = 10$ मीटर। उत्तर: 10 मीटर
- एक मीनार के आधार से 50 मीटर दूर एक बिंदु से मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण 45° है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात करें। हल: $\tan(45°)$ = ऊंचाई / दूरी, तो ऊंचाई = दूरी × $\tan(45°)$। $\tan(45°) = 1$, तो ऊंचाई = $50 \times 1 = 50$ मीटर। उत्तर: 50 मीटर
- एक सीढ़ी एक दीवार के सहारे टिकी है, जो ज़मीन के साथ 60° का कोण बनाती है। यदि सीढ़ी का पाया दीवार से 5 मीटर दूर है, तो सीढ़ी की लंबाई ज्ञात करें। हल: सीढ़ी कर्ण है, और 5 मीटर 60° कोण से सटी भुजा है: $\cos(60°)$ = आसन्न / कर्ण। $\cos(60°) = 1/2$, तो कर्ण = $5 / (1/2) = 10$ मीटर। उत्तर: 10 मीटर
- 100 मीटर ऊंची एक चट्टान के शीर्ष से, एक नाव का अवनमन कोण 30° है। चट्टान के आधार से नाव की दूरी ज्ञात करें। हल: शीर्ष से अवनमन कोण नाव से उन्नयन कोण के बराबर होता है (एकांतर कोण), तो $\tan(30°)$ = ऊंचाई / दूरी। $\tan(30°) = 1/\sqrt{3}$, तो $1/\sqrt{3} = 100$ / दूरी, जिससे दूरी = $100\sqrt{3} \approx 173.2$ मीटर। उत्तर: $100\sqrt{3}$ मीटर ≈ 173.2 मीटर
- ज़मीन पर एक बिंदु से, एक मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ओर 20 मीटर चलने के बाद, कोण 60° हो जाता है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात करें। हल: ऊंचाई = h मानें, और मूल दूरी d मानें। पहली स्थिति से: $\tan 30° = h/d$, तो $d = h\sqrt{3}$। नज़दीकी स्थिति से: $\tan 60° = h/(d-20)$, तो $d - 20 = h/\sqrt{3}$। रखें: $h\sqrt{3} - 20 = h/\sqrt{3}$। दोनों तरफ $\sqrt{3}$ से गुणा करें: $3h - 20\sqrt{3} = h$, तो $2h = 20\sqrt{3}$, जिससे $h = 10\sqrt{3} \approx 17.32$ मीटर। उत्तर: $10\sqrt{3}$ मीटर ≈ 17.32 मीटर
- एक 20 मीटर ऊंची मीनार पर एक झंडा खड़ा है। ज़मीन पर एक बिंदु से, झंडे के नीचे का उन्नयन कोण 30° है, और झंडे के शीर्ष का उन्नयन कोण 45° है। झंडे की लंबाई ज्ञात करें। हल: बिंदु से मीनार तक क्षैतिज दूरी d मानें। झंडे के नीचे (मीनार के शीर्ष, ऊंचाई 20) से: $\tan 30° = 20/d$, तो $d = 20\sqrt{3}$। झंडे के शीर्ष (ऊंचाई 20 + L, जहां L झंडे की लंबाई है) से: $\tan 45° = (20+L)/d$, और चूंकि $\tan 45° = 1$, यह $20 + L = d = 20\sqrt{3}$ देता है। $L = 20\sqrt{3} - 20 = 20(\sqrt{3}-1) \approx 14.64$ मीटर। उत्तर: $20(\sqrt{3}-1)$ मीटर ≈ 14.64 मीटर
- Practice: एक मीनार की छाया की लंबाई $20\sqrt{3}$ मीटर है जब सूर्य का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात करें। (उत्तर: 20 मीटर)
- Practice: एक इमारत के आधार से 40 मीटर दूर एक बिंदु से इमारत के शीर्ष का उन्नयन कोण 45° है। इमारत की ऊंचाई ज्ञात करें। (उत्तर: 40 मीटर)
- Practice: एक सीढ़ी एक दीवार के सहारे टिकी है, जो ज़मीन के साथ 60° का कोण बनाती है। यदि सीढ़ी का पाया दीवार से 6 मीटर दूर है, तो सीढ़ी की लंबाई ज्ञात करें। (उत्तर: 12 मीटर)
- Practice: ज़मीन पर एक बिंदु से, एक मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ओर 40 मीटर चलने के बाद, कोण 60° हो जाता है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात करें। (उत्तर: $20\sqrt{3}$ मीटर ≈ 34.64 मीटर। उदाहरण जैसी ही विधि, 20 मीटर के बजाय 40 मीटर के साथ।)
- Practice: एक 10 मीटर ऊंची मीनार पर एक झंडा खड़ा है। उसी बिंदु से झंडे के नीचे का उन्नयन कोण 30° है, और शीर्ष का 60° है। झंडे की लंबाई ज्ञात करें। (उत्तर: 20 मीटर। 30° कोण से $d = 10\sqrt{3}$; $10 + L = d\sqrt{3} = 30$, तो $L = 20$।)

- Practice: 20 मीटर लंबा एक तार किसी खंभे के शीर्ष से ज़मीन के एक बिंदु तक बंधा है, जो ज़मीन के साथ 30° का कोण बनाता है। खंभे की ऊंचाई ज्ञात करें। (उत्तर: 10 मीटर। sin 30° = ऊंचाई/20, तो ऊंचाई = 20 × 1/2।)
- Practice: 60 मीटर ऊंची एक मीनार के शीर्ष से, एक कार का अवनमन कोण 45° है। मीनार के आधार से कार की दूरी ज्ञात करें। (उत्तर: 60 मीटर। tan 45° = 60/दूरी = 1।)

> **त्वरित दोहराव:** तीन मानक कोण और उनके टैंजेंट मान (यहां सबसे ज़्यादा उपयोग होने वाला अनुपात): tan 30° = 1/√3, tan 45° = 1, tan 60° = √3।; उन्नयन कोण (angle of elevation) क्षैतिज रेखा से ऊपर की ओर मापा जाता है (किसी चीज़ को ऊपर देखते हुए); अवनमन कोण (angle of depression) क्षैतिज रेखा से नीचे की ओर मापा जाता है (किसी चीज़ को नीचे देखते हुए) — दोनों क्षैतिज रेखा से मापे जाते हैं, ज़मीन या वस्तु से नहीं।; tan(कोण) = सम्मुख भुजा / आसन्न भुजा, जहां "सम्मुख" ऊंचाई (ऊर्ध्वाधर) है और "आसन्न" आधार से क्षैतिज दूरी है — पहले त्रिभुज बनाएं, ऊंचाई और दूरी को लेबल करें, फिर tan लागू करें।; एक तिरछी रेखा (जैसे सीढ़ी या तार, जो कर्ण होती है) के लिए, tan के बजाय sin या cos का उपयोग करें: जब कोण ज़मीन के साथ हो तो cos(कोण) = आसन्न/कर्ण, sin(कोण) = सम्मुख/कर्ण।; यदि पर्यवेक्षक आधार की ओर या उससे दूर एक ज्ञात दूरी चलने पर उन्नयन कोण बदल जाए, तो हर स्थिति पर अलग tan समीकरण बनाएं (दोनों एक ही अज्ञात ऊंचाई साझा करते हुए), फिर दोनों को साथ हल करें।; "इमारत के ऊपर झंडे/एंटीना" वाले प्रश्न के लिए, जहां एक ही बिंदु से झंडे के नीचे और ऊपर दोनों के उन्नयन कोण दिए हों, एक ही क्षैतिज दूरी साझा करने वाले दो समकोण त्रिभुज बनाएं, हर ऊंचाई निकालें, और झंडे की अपनी लंबाई पाने के लिए घटाएं।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/heights-distances/

ल.स. और म.स. (LCM और HCF)

LCM और HCF: अभाज्य गुणनखंडन और गुणनफल शॉर्टकट

HCF (महत्तम समापवर्तक) सबसे बड़ी संख्या है जो हर दी गई संख्या को पूरी तरह विभाजित करती है। LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) सबसे छोटी संख्या है जिसे हर दी गई संख्या पूरी तरह विभाजित करती है। अभाज्य गुणनखंडन विधि: हर संख्या को अभाज्य गुणनखंडों में तोड़ें। HCF = साझा अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल, हर एक की सबसे कम घात पर। LCM = सभी अभाज्य गुणनखंडों (साझा और गैर-साझा दोनों) का गुणनफल, हर एक की सबसे ज़्यादा घात पर। केवल दो संख्याओं a और b के लिए उपयोगी शॉर्टकट: HCF(a, b) × LCM(a, b) = a × b, जिससे एक को दूसरे से सीधे निकाला जा सकता है। "X, Y और Z को विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या जो हर बार वही शेषफल R छोड़े" वाले प्रश्नों के लिए, सीधे X, Y, Z के बजाय (X − R), (Y − R) और (Z − R) का HCF ज्ञात करें।

एक महत्वपूर्ण चेतावनी: HCF × LCM = गुणनफल वाला शॉर्टकट केवल ठीक दो संख्याओं के लिए काम करता है - यह तीन या अधिक संख्याओं के लिए लागू नहीं होता। 4, 6, और 8 के लिए: HCF = 2 और LCM = 24, तो HCF × LCM = 48, लेकिन वास्तविक गुणनफल 4×6×8 = 192 है। ये बराबर नहीं हैं, और तीन-संख्या वाले प्रश्न में दो-संख्या शॉर्टकट पर भरोसा करना एक आम और महंगी गलती है।

जब संख्याएं बड़ी हों और देखकर गुणनखंडित करना कठिन हो, तो क्रमिक विभाजन (यूक्लिड एल्गोरिथम) बिना किसी अभाज्य गुणनखंडन के HCF ज्ञात कर देता है: बड़ी संख्या को छोटी से विभाजित करें, फिर पिछले भाजक को शेषफल से बार-बार विभाजित करते रहें, जब तक शेषफल 0 न हो जाए - अंतिम गैर-शून्य भाजक ही HCF है। इस तरह दो बड़ी संख्याओं का HCF मिल जाने पर, उनका LCM अभी भी LCM = (a×b)/HCF से तुरंत निकाला जा सकता है।

LCM और HCF भिन्नों (fractions) तक भी विस्तारित होते हैं: भिन्नों का HCF = HCF(अंश)/LCM(हर), और भिन्नों का LCM = LCM(अंश)/HCF(हर) - ध्यान दें कि अंश की तुलना में हर के लिए संयोजन नियम बदल जाता है। अंत में, जिन दो संख्याओं का 1 के अलावा कोई साझा गुणनखंड न हो उन्हें सहअभाज्य (co-prime) कहा जाता है, और सहअभाज्य संख्याओं के लिए विशेष रूप से, LCM बस उनका गुणनफल होता है (क्योंकि घटाने के लिए कोई अतिव्यापन नहीं होता)।

उदाहरण

- $12 = 2^2 \times 3$ और $18 = 2 \times 3^2$: HCF = $2^1 \times 3^1 = 6$, LCM = $2^2 \times 3^2 = 36$; जांच HCF × LCM = 216 = 12 × 18।
- 3:4 के अनुपात में दो संख्याओं का LCM 48 है: उन्हें 3x और 4x लिखने पर, LCM = 12x = 48 से x = 4, तो संख्याएं 12 और 16 हैं, HCF = 4।
- 70 और 125 को विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या जो क्रमशः 5 और 8 शेषफल छोड़े, वह है HCF(70−5, 125−8) = HCF(65, 117) = 13; जांच 70÷13 = 5 शेष 5 और 125÷13 = 9 शेष 8।
- $24 = 2^3 \times 3$, $36 = 2^2 \times 3^2$, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$: HCF (तीनों में साझा) = $2^2 \times 3 = 12$, LCM = $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$ - ध्यान दें HCF×LCM = 4320 वास्तविक गुणनफल 24×36×60 = 51,840 के आसपास भी नहीं है, क्योंकि दो-संख्या शॉर्टकट तीन संख्याओं पर लागू नहीं होता।
- 4, 6, और 8 के लिए: HCF = 2 और LCM = 24, तो HCF×LCM = 48 - लेकिन वास्तविक गुणनफल 4×6×8 = 192 है, जो पुष्टि करता है कि HCF×LCM=गुणनफल शॉर्टकट केवल ठीक दो संख्याओं के लिए ही लागू होता है।
- क्रमिक विभाजन से HCF(414, 662) ज्ञात करना: 662 = 1×414+248, 414 = 1×248+166, 248 = 1×166+82, 166 = 2×82+2, 82 = 41×2+0 - अंतिम गैर-शून्य शेषफल 2 है, तो HCF(414,662) = 2, और LCM = (414×662)/2 = 137,034।
- 2/3 और 4/9 का HCF और LCM: HCF = HCF(2,4)/LCM(3,9) = 2/9, और LCM = LCM(2,4)/HCF(3,9) = 4/3; जांच (2/3)÷(2/9) = 3 और (4/9)÷(2/9) = 2, दोनों पूर्ण संख्याएं हैं जैसा आवश्यक है।

- 7 और 9 का 1 के अलावा कोई साझा गुणनखंड नहीं है (वे सहअभाज्य हैं), तो उनका LCM बस उनका गुणनफल है: LCM(7,9) = 63, और HCF = 1।

> **त्वरित दोहराव:** HCF = साझा अभाज्य गुणनखंड सबसे कम घात पर; LCM = सभी अभाज्य गुणनखंड सबसे ज़्यादा घात पर। HCF × LCM = a × b केवल दो संख्याओं के लिए सही है, तीन या अधिक के लिए कभी नहीं। समान-शेषफल प्रश्न: (संख्याओं में से शेषफल घटाकर) का HCF। बड़ी संख्याएं: क्रमिक (यूक्लिड) विभाजन उपयोग करें। भिन्न: HCF = HCF(अंश)/LCM(हर), LCM = LCM(अंश)/HCF(हर)। सहअभाज्य संख्याएं: LCM = उनका गुणनफल।

ल.स. और म.स. (LCM और HCF) के प्रश्न हल सहित

LCM और HCF के प्रश्न अभाज्य गुणनखंडन (prime factorization) विधि को अच्छी तरह जानने, दोनों को जोड़ने वाले शॉर्टकट, और परीक्षाओं में आम शेषफल वाले प्रकारों का इनाम देते हैं। इस पेज में मुख्य विधि, दो क्लासिक शेषफल पैटर्न, दोहराई जाने वाली घटनाओं (जैसे घंटियां साथ बजना) के लिए LCM का उपयोग, और कई हल किए गए उदाहरण दिए गए हैं। HCF (महत्तम समापवर्तक) सबसे बड़ी संख्या है जो हर दी गई संख्या को पूरी तरह विभाजित करती है। LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) सबसे छोटी संख्या है जिसे हर दी गई संख्या पूरी तरह विभाजित करती है। अभाज्य गुणनखंडन विधि: हर संख्या को अभाज्य गुणनखंडों में तोड़ें। HCF = साझा अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल, हर एक संख्याओं में उसकी सबसे कम घात पर। LCM = सभी अभाज्य गुणनखंडों (साझा और गैर-साझा दोनों) का गुणनफल, हर एक की सबसे ज़्यादा घात पर। दो संख्याओं a और b के लिए उपयोगी शॉर्टकट: HCF(a, b) × LCM(a, b) = a × b। यह आपको दोबारा गुणनखंडन किए बिना एक से दूसरा सीधे निकालने देता है। यदि a और b सह-अभाज्य (co-prime) हैं (HCF = 1), तो यह और सरल हो जाता है: LCM = a × b सीधे। "X, Y और Z को विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या जो हर बार वही शेषफल R छोड़े" वाले प्रश्नों के लिए, सीधे X, Y, Z के बजाय (X − R), (Y − R) और (Z − R) का HCF ज्ञात करें। "a, b और c से विभाज्य सबसे छोटी संख्या" = LCM(a, b, c)। "a, b और c से भाग देने पर हर बार वही शेषफल R छोड़ने वाली सबसे छोटी संख्या" = LCM(a, b, c) + R। "a, b और c से भाग देने पर, हर शेषफल अपने भाजक से ठीक k कम हो" (पहले हर भाजक के लिए यह जांच लें) तो सबसे छोटी संख्या = LCM(a, b, c) − k। नियत अंतराल पर दोहराई जाने वाली घटनाएं जिन्हें फिर साथ होना है (घंटियां साथ बजना, धावकों का साथ शुरू होना, लाइटों का साथ बदलना) LCM का उपयोग है: वे अगली बार कब साथ होंगी, यह उनके अलग-अलग अंतरालों के LCM से मिलता है।

उदाहरण

- 12 और 18 का HCF और LCM ज्ञात करें। हल: $12 = 2^2 \times 3$। $18 = 2 \times 3^2$। HCF = साझा गुणनखंड उनकी सबसे कम घात पर = $2^1 \times 3^1 = 6$। LCM = सभी गुणनखंड उनकी सबसे ज़्यादा घात पर = $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$। जांच: HCF × LCM = 6 × 36 = 216, और 12 × 18 = 216 — मेल खाता है। उत्तर: HCF = 6, LCM = 36
- 24, 36, और 60 का HCF और LCM ज्ञात करें। हल: $24 = 2^3 \times 3$। $36 = 2^2 \times 3^2$। $60 = 2^2 \times 3 \times 5$। HCF = साझा गुणनखंड (2 और 3 तीनों में हैं; 5 नहीं है) तीनों में उनकी सबसे कम घात पर: $2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$। LCM = सभी गुणनखंड उनकी सबसे ज़्यादा घात पर: $2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 8 \times 9 \times 5 = 360$। उत्तर: HCF = 12, LCM = 360
- दो संख्याएं 3 : 4 के अनुपात में हैं और उनका LCM 48 है। HCF और दोनों संख्याएं ज्ञात करें। हल: मान लें संख्याएं 3x और 4x हैं। चूंकि 3 और 4 का कोई साझा गुणनखंड नहीं है, x खुद HCF है, और LCM, 3 × 4 × x = 12x है। 12x = 48 → x = 4। संख्याएं हैं 3 × 4 = 12 और 4 × 4 = 16। HCF = x = 4। जांच: HCF(12, 16) = 4 और LCM(12, 16) = 48 — मेल खाता है। उत्तर: HCF = 4, संख्याएं 12 और 16 हैं
- 70 और 125 को विभाजित करने वाली वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जो क्रमशः 5 और 8 शेषफल छोड़े। हल: आवश्यक संख्या (70 − 5) और (125 − 8) का HCF है, यानी HCF(65, 117)। 65 = 5 × 13। $117 = 3^2 \times 13$। HCF = 13। जांच: 70 ÷ 13 = 5 शेषफल 5। 125 ÷ 13 = 9 शेषफल 8 — दोनों मेल खाते हैं। उत्तर: 13
- वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात करें जो 12, 16 और 24 से भाग देने पर हर बार 7 शेषफल छोड़े। हल: पहले LCM(12, 16, 24) ज्ञात करें: $12 = 2^2 \times 3$, $16 = 2^4$, $24 = 2^3 \times 3$ → LCM = $2^4 \times 3 = 48$। वही शेषफल R छोड़ने वाली सबसे छोटी संख्या = LCM + R = 48 + 7 = 55। उत्तर: 55
- वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात करें जो 20, 25 और 30 से भाग देने पर क्रमशः 17, 22 और 27 शेषफल छोड़े। हल: "भाजक से k कम" पैटर्न जांचें: 20−17=3, 25−22=3, 30−27=3 — सुसंगत है, तो k = 3। LCM(20, 25, 30): $20 = 2^2 \times 5$, $25 = 5^2$, $30 = 2 \times 3 \times 5$ → LCM = $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$। आवश्यक संख्या = LCM − k = 300 − 3 = 297। जांच: 297 ÷ 20 = 14 शेषफल 17; 297 ÷ 25 = 11 शेषफल 22; 297 ÷ 30 = 9 शेषफल 27 — सभी मेल खाते हैं। उत्तर: 297
- तीन घंटियां क्रमशः 15, 20 और 30 मिनट के अंतराल पर बजती हैं। यदि वे सभी सुबह 9:00 बजे साथ बजती हैं, तो वे फिर कब साथ बजेंगी? हल: LCM(15, 20, 30): 15 = 3 × 5, $20 = 2^2 \times 5$, 30 = 2 × 3 × 5 → LCM = $2^2 \times 3 \times 5 = 60$। वे 60 मिनट बाद, यानी सुबह 10:00 बजे फिर साथ बजेंगी। उत्तर: सुबह 10:00 बजे
- Practice: 15 और 20 का HCF और LCM ज्ञात करें। (उत्तर: HCF = 5, LCM = 60)
- Practice: 8, 12, और 20 का HCF और LCM ज्ञात करें। (उत्तर: HCF = 4, LCM = 120)
- Practice: दो संख्याओं का HCF 6 है और उनका LCM 90 है। यदि उनमें से एक संख्या 18 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात करें। (उत्तर: 30। HCF × LCM = संख्याओं का गुणनफल = 540; 540/18।)
- Practice: वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात करें जो 10, 15 और 20 से भाग देने पर हर बार 4 शेषफल छोड़े। (उत्तर: 64। LCM(10,15,20) = 60; 60 + 4।)
- Practice: वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात करें जो 15, 20 और 25 से भाग देने पर क्रमशः 11, 16 और 21 शेषफल छोड़े। (उत्तर: 296। हर बार k = 4 (15−11=20−16=25−21=4); LCM(15,20,25) = 300; 300 − 4।)

- Practice: तीन घंटियां 6, 8 और 12 मिनट के अंतराल पर बजती हैं। यदि वे दोपहर 12:00 बजे साथ बजती हैं, तो वे फिर कब साथ बजेंगी? (उत्तर: दोपहर 12:24 बजे। LCM(6,8,12) = 24 मिनट।)
- Practice: 7 और 11 का LCM ज्ञात करें। (उत्तर: 77। 7 और 11 सह-अभाज्य हैं (HCF = 1), तो LCM = 7 × 11 सीधे।)

त्वरित दोहराव: HCF (महत्तम समापवर्तक) सबसे बड़ी संख्या है जो हर दी गई संख्या को पूरी तरह विभाजित करती है। LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) सबसे छोटी संख्या है जिसे हर दी गई संख्या पूरी तरह विभाजित करती है।; अभाज्य गुणनखंडन विधि: हर संख्या को अभाज्य गुणनखंडों में तोड़ें। HCF = साझा अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल, हर एक संख्याओं में उसकी सबसे कम घात पर। LCM = सभी अभाज्य गुणनखंडों (साझा और गैर-साझा दोनों) का गुणनफल, हर एक की सबसे ज़्यादा घात पर।; दो संख्याओं a और b के लिए उपयोगी शॉर्टकट: HCF(a, b) × LCM(a, b) = a × b। यह आपको दोबारा गुणनखंडन किए बिना एक से दूसरा सीधे निकालने देता है। यदि a और b सह-अभाज्य (co-prime) हैं (HCF = 1), तो यह और सरल हो जाता है: LCM = a × b सीधे।; "X, Y और Z को विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या जो हर बार वही शेषफल R छोड़े" वाले प्रश्नों के लिए, सीधे X, Y, Z के बजाय (X − R), (Y − R) और (Z − R) का HCF ज्ञात करें।; "a, b और c से विभाज्य सबसे छोटी संख्या" = LCM(a, b, c)। "a, b और c से भाग देने पर हर बार वही शेषफल R छोड़ने वाली सबसे छोटी संख्या" = LCM(a, b, c) + R।; "a, b और c से भाग देने पर, हर शेषफल अपने भाजक से ठीक k कम हो" (पहले हर भाजक के लिए यह जांच लें) तो सबसे छोटी संख्या = LCM(a, b, c) − k।; नियत अंतराल पर दोहराई जाने वाली घटनाएं जिन्हें फिर साथ होना है (घंटियां साथ बजना, धावकों का साथ शुरू होना, लाइटों का साथ बदलना) LCM का उपयोग है: वे अगली बार कब साथ होंगी, यह उनके अलग-अलग अंतरालों के LCM से मिलता है।

भिन्नों का HCF और LCM के प्रश्न हल सहित

यह कोई नया विचार नहीं है — यह पूर्णांकों वाली वही HCF/LCM विधि है, अंशों (numerators) और हरों (denominators) पर अलग-अलग लागू की गई है — लेकिन यह सही तरीके से तभी काम करती है जब आप पहले हर भिन्न को उसके सबसे सरल रूप में बदल लें। इस पेज में सूत्र, वह ज़रूरी पहले-सरल-करें चरण (एक उदाहरण के साथ जो दिखाता है कि इसे छोड़ने से चुपचाप गलत उत्तर मिल सकता है), और एक जांच विधि शामिल है, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। भिन्नों का HCF = अंशों का HCF / हरों का LCM — बशर्ते हर भिन्न पहले अपने सबसे सरल रूप में लिखी गई हो (अंश और हर में कोई साझा गुणनखंड न हो)। भिन्नों का LCM = अंशों का LCM / हरों का HCF — वही सरलतम-रूप शर्त के साथ। अंशों का HCF या हरों का LCM निकालने से पहले हमेशा हर दी गई भिन्न को पहले सबसे सरल रूप में बदलें। इसे छोड़ने से चुपचाप गलत उत्तर मिल सकता है: 2/4 और 3/6 (दोनों 1/2 के बराबर) के लिए, बिना सरल किए सीधा सूत्र HCF(2,3)/LCM(4,6) = 1/12 देता है — जो सही HCF नहीं है, क्योंकि 1/2 खुद एक बहुत बड़ा मान है जिसका दोनों भिन्नें ठीक गुणज हैं। पहले सरल करने पर (1/2 और 1/2) सही उत्तर HCF = 1/2 मिलता है। अंतिम उत्तर को सरल करना (यदि वह पहले से सबसे सरल रूप में नहीं है) एक अलग, वैकल्पिक अंतिम चरण है जो उत्तर को साफ बनाता है — यह इनपुट को पहले सरल करने का विकल्प नहीं है, और उस चरण को छोड़ने से हुई गलती को भरोसे से ठीक नहीं करेगा। अपना उत्तर जांचें: भिन्नों का HCF हर दी गई भिन्न में बिल्कुल विभाजित होना चाहिए (हर मूल भिन्न ÷ आपका HCF एक पूर्ण संख्या होनी चाहिए); भिन्नों का LCM खुद हर दी गई भिन्न से बिल्कुल विभाज्य होना चाहिए (आपका LCM ÷ हर मूल भिन्न एक पूर्ण संख्या होनी चाहिए)। पूरी प्रक्रिया पूर्णांक HCF/LCM जैसी ही है — हर भिन्न को सरल करें, अंशों और हरों पर बताए अनुसार HCF/LCM लागू करें, फिर ज़रूरत हो तो परिणाम को सरल करें। एकमात्र नया कौशल एक साथ अंश और हर दोनों को संभालना है, न कि केवल एक संख्या।

उदाहरण

- 2/3 और 4/9 का HCF ज्ञात करें। हल: दोनों भिन्नें पहले से सबसे सरल रूप में हैं। अंशों का HCF: HCF(2, 4) = 2। हरों का LCM: LCM(3, 9) = 9। भिन्नों का HCF = 2/9। उत्तर: 2/9
- 2/3 और 4/9 का LCM ज्ञात करें। हल: दोनों भिन्नें पहले से सबसे सरल रूप में हैं। अंशों का LCM: LCM(2, 4) = 4। हरों का HCF: HCF(3, 9) = 3। भिन्नों का LCM = 4/3। उत्तर: 4/3
- 4/5, 8/15, और 12/25 का HCF ज्ञात करें। हल: तीनों भिन्नें पहले से सबसे सरल रूप में हैं। अंशों का HCF: HCF(4, 8, 12) = 4। हरों का LCM: LCM(5, 15, 25) = 75। भिन्नों का HCF = 4/75। उत्तर: 4/75
- 4/5, 8/15, और 12/25 का LCM ज्ञात करें, और इसकी जांच करें। हल: अंशों का LCM: LCM(4, 8, 12) = 24। हरों का HCF: HCF(5, 15, 25) = 5। भिन्नों का LCM = 24/5। जांच: (24/5) ÷ (4/5) = 6 ✓, (24/5) ÷ (8/15) = 9 ✓, (24/5) ÷ (12/25) = 10 ✓ — सभी पूर्ण संख्याएं, जो एक वास्तविक LCM के लिए आवश्यक है। उत्तर: 24/5
- 2/4 और 3/6 का HCF ज्ञात करें। हल: कोई भी भिन्न सबसे सरल रूप में नहीं है: 2/4 = 1/2 और 3/6 = 1/2। पहले दोनों को सरल करें। अब सरल भिन्नों पर सूत्र लागू करें: HCF(1, 1) = 1, LCM(2, 2) = 2। HCF = 1/2। बिना सरल किए मूल संख्याओं का उपयोग करने पर गलत उत्तर HCF(2,3)/LCM(4,6) = 1/12 मिलता — इसलिए पहले सरल करना ज़रूरी है। उत्तर: 1/2
- 6/7, 12/21, और 18/35 का HCF ज्ञात करें (ध्यान दें 12/21 सबसे सरल रूप में नहीं है)। हल: पहले 12/21 को सरल करें: HCF(12,21) = 3, तो 12/21 = 4/7। बाकी दो भिन्नें, 6/7 और 18/35, पहले से सबसे सरल रूप में हैं। अब 6/7, 4/7, 18/35 पर सूत्र लागू करें: अंशों का HCF = HCF(6, 4, 18) = 2। हरों का LCM = LCM(7, 7, 35) = 35। भिन्नों का HCF = 2/35। उत्तर: 2/35
- 3/6 और 5/10 का LCM ज्ञात करें। हल: पहले दोनों को सरल करें: 3/6 = 1/2 और 5/10 = 1/2 — वे असल में समान मान हैं। अंशों का LCM: LCM(1, 1) = 1। हरों का HCF: HCF(2, 2) = 2। LCM = 1/2 (दो बराबर मानों का LCM वही मान होता है)। उत्तर: 1/2
- Practice: 3/4 और 9/10 का HCF ज्ञात करें। (उत्तर: 3/20)
- Practice: 3/4 और 9/10 का LCM ज्ञात करें। (उत्तर: 9/2)
- Practice: 6/7, 12/21, और 18/35 का HCF ज्ञात करें। (उत्तर: 2/35। पहले 12/21 को 4/7 तक सरल करें (उनके HCF, 3, से भाग देकर); फिर HCF(6,4,18)/LCM(7,7,35)।)

- Practice: 4/8 और 6/12 का HCF ज्ञात करें। (उत्तर: 1/2। दोनों पहले 1/2 तक सरल होते हैं।)
- Practice: 2/4 और 6/8 का LCM ज्ञात करें। (उत्तर: 3/2। पहले 1/2 और 3/4 तक सरल करें; LCM(1,3)/HCF(2,4) = 3/2।)
- Practice: 8/10, 4/5, और 12/20 का HCF ज्ञात करें। (उत्तर: 1/5। पहले 4/5, 4/5, 3/5 तक सरल करें; HCF(4,4,3)/LCM(5,5,5) = 1/5।)
- Practice: 5/6 और 7/9 का LCM ज्ञात करें। (उत्तर: 35/3। दोनों पहले से सबसे सरल रूप में हैं: LCM(5,7)/HCF(6,9)।)

> **त्वरित दोहराव:** भिन्नों का HCF = अंशों का HCF / हरों का LCM — बशर्ते हर भिन्न पहले अपने सबसे सरल रूप में लिखी गई हो (अंश और हर में कोई साझा गुणनखंड न हो)।; भिन्नों का LCM = अंशों का LCM / हरों का HCF — वही सरलतम-रूप शर्त के साथ।; अंशों का HCF या हरों का LCM निकालने से पहले हमेशा हर दी गई भिन्न को पहले सबसे सरल रूप में बदलें। इसे छोड़ने से चुपचाप गलत उत्तर मिल सकता है: 2/4 और 3/6 (दोनों 1/2 के बराबर) के लिए, बिना सरल किए सीधा सूत्र HCF(2,3)/LCM(4,6) = 1/12 देता है — जो सही HCF नहीं है, क्योंकि 1/2 खुद एक बहुत बड़ा मान है जिसका दोनों भिन्नें ठीक गुणज हैं। पहले सरल करने पर (1/2 और 1/2) सही उत्तर HCF = 1/2 मिलता है।; अंतिम उत्तर को सरल करना (यदि वह पहले से सबसे सरल रूप में नहीं है) एक अलग, वैकल्पिक अंतिम चरण है जो उत्तर को साफ बनाता है — यह इनपुट को पहले सरल करने का विकल्प नहीं है, और उस चरण को छोड़ने से हुई गलती को भरोसे से ठीक नहीं करेगा।; अपना उत्तर जांचें: भिन्नों का HCF हर दी गई भिन्न में बिल्कुल विभाजित होना चाहिए (हर मूल भिन्न ÷ आपका HCF एक पूर्ण संख्या होनी चाहिए); भिन्नों का LCM खुद हर दी गई भिन्न से बिल्कुल विभाज्य होना चाहिए (आपका LCM ÷ हर मूल भिन्न एक पूर्ण संख्या होनी चाहिए)।; पूरी प्रक्रिया पूर्णांक HCF/LCM जैसी ही है — हर भिन्न को सरल करें, अंशों और हरों पर बताए अनुसार HCF/LCM लागू करें, फिर ज़रूरत हो तो परिणाम को सरल करें। एकमात्र नया कौशल एक साथ अंश और हर दोनों को संभालना है, न कि केवल एक संख्या।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/lcm-and-hcf/

क्षेत्रमिति (क्षेत्रफल और परिमाप)

क्षेत्रमिति: 2D — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

परिमाप किसी आकृति की सीमा की लंबाई मापता है, जबकि क्षेत्रफल वर्ग इकाइयों में घिरे क्षेत्र को मापता है। एक आयत का क्षेत्रफल lb और परिमाप 2(l + b) होता है, एक वर्ग का क्षेत्रफल s^2 और परिमाप 4s होता है, और एक त्रिभुज का क्षेत्रफल आधार × लंब ऊंचाई/2 होता है। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल आधार × ऊंचाई है, समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके विकर्णों के गुणनफल का आधा है, और समलंब का क्षेत्रफल उसकी समांतर भुजाओं के योग का आधा गुणा उनकी दूरी है। एक नियमित बहुभुज का परिमाप भुजा संख्या × भुजा लंबाई है, और इसका क्षेत्रफल इसके परिमाप का आधा गुणा अंतःत्रिज्या (apothem) है। एक वृत्त की परिधि $2\pi r$ और क्षेत्रफल πr^2 होता है; एक त्रिज्यखंड वृत्त के क्षेत्रफल और परिधि का कोण/360 हिस्सा अपने क्षेत्रफल और चाप लंबाई के लिए लेता है। संयुक्त आकृतियों को गैर-अतिव्यापी भागों में बांटें या स्पष्ट रूप से हटाए गए क्षेत्रों को घटाएं, इकाइयां और बताए गए π के मान को एक समान रखते हुए।

एक त्रिज्यखंड के लिए, इसका क्षेत्रफल और चाप लंबाई दोनों पूरे वृत्त का वही अंश (कोण/360°) उपयोग करते हैं - क्षेत्रफल = (कोण/360°) × πr^2 और चाप लंबाई = (कोण/360°) × $2\pi r$ - तो एक ज्ञात करना अक्सर दूसरे के लिए बस पूर्ण-वृत्त क्षेत्रफल या परिधि सूत्र में बदलने की बात है।

एक नियमित षट्भुज का एक विशेष रूप से साफ क्षेत्रफल सूत्र अलग से याद रखने योग्य है: $(3\sqrt{3}/2) \times$ भुजा^{2}, जो इसे 6 समबाहु त्रिभुजों में विभाजित करने से आता है - उपयोगी क्योंकि सामान्य अंतःत्रिज्या-आधारित बहुभुज सूत्र को पहले अंतःत्रिज्या निकालने की ज़रूरत होती है, जबकि यह शॉर्टकट विशेष रूप से षट्भुजों के लिए उस चरण को पूरी तरह छोड़ देता है।

उदाहरण

- 6 cm भुजा वाले एक वर्ग का क्षेत्रफल cm^2 में ज्ञात करें। हल: एक वर्ग की चार समान भुजाएं और समकोण होते हैं। इसका क्षेत्रफल $6 \times 6 = 36\ cm^2$ है।
- एक समचतुर्भुज के विकर्ण 12 और 16 cm हैं। इसका क्षेत्रफल cm^2 में ज्ञात करें। हल: क्षेत्रफल विकर्ण गुणनफल का आधा है: $12 \times 16/2 = 96\ cm^2$।
- 22 cm लंबे और 28 cm चौड़े एक आयत में एक चौड़ाई के साथ बाहरी रूप से 14 cm त्रिज्या का अर्धवृत्त जुड़ा है। आंतरिक भाग ओवरलैप नहीं करते। π = 22/7 उपयोग करते हुए संयुक्त क्षेत्रफल cm^2 में ज्ञात करें। हल: आयत क्षेत्रफल $22 \times 28 = 616$ है। अर्धवृत्त क्षेत्रफल $(22/7) \times 14^2/2 = 308$ है। गैर-अतिव्यापी क्षेत्रफल जोड़ने पर 924 cm^2 मिलता है।
- 21 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण 60° है। π = 22/7 उपयोग करते हुए इसका क्षेत्रफल और चाप लंबाई ज्ञात करें। हल: क्षेत्रफल = $(60/360) \times (22/7) \times 21^2 = (1/6) \times 1386 = 231\ cm^2$। चाप लंबाई = $(60/360) \times 2 \times (22/7) \times 21 = (1/6) \times 132 = 22$ cm।
- 10 cm और 14 cm समांतर भुजाओं और 6 cm ऊंचाई वाले एक समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात करें। हल: क्षेत्रफल = ½ × (समांतर भुजाओं का योग) × ऊंचाई = ½ × (10+14) × 6 = ½ × 24 × 6 = 72 cm^2।
- 6 cm भुजा वाले एक नियमित षट्भुज का क्षेत्रफल $\sqrt{3}$ के रूप में ज्ञात करें। हल: षट्भुज शॉर्टकट उपयोग करते हुए, क्षेत्रफल = $(3\sqrt{3}/2) \times 6^2 = (3\sqrt{3}/2) \times 36 = 54\sqrt{3}\ cm^2$ - पहले अंतःत्रिज्या निकाले बिना सीधे प्राप्त किया गया।

> **त्वरित दोहराव:** आयत: क्षेत्रफल=lb, परिमाप=2(l+b)। वर्ग: क्षेत्रफल=s^2, परिमाप=4s। त्रिभुज: क्षेत्रफल=½×आधार×ऊंचाई। समचतुर्भुज: क्षेत्रफल=½×d_1×d_2। समलंब: क्षेत्रफल=½×(समांतर भुजाओं का योग)×ऊंचाई। वृत्त: परिधि=$2\pi r$, क्षेत्रफल=πr^2। त्रिज्यखंड: क्षेत्रफल और चाप लंबाई दोनों पूर्ण वृत्त सूत्र का वही अंश (कोण/360°) उपयोग करते हैं। नियमित षट्भुज शॉर्टकट: क्षेत्रफल=$(3\sqrt{3}/2) \times$ भुजा^{2}।

क्षेत्रमिति (क्षेत्रफल और परिमाप) के प्रश्न हल सहित

क्षेत्रमिति के प्रश्न ज़्यादातर सामने की आकृति के लिए सही सूत्र चुनने और सावधानी से मान रखने के बारे में होते हैं। इस पेज में आयत, वृत्त, त्रिभुज (केवल तीन भुजाएं ज्ञात होने पर हीरोन का सूत्र सहित), समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, समलंब और वृत्त-खंड (सेक्टर) शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। परिमाप किसी आकृति के चारों ओर की दूरी है; क्षेत्रफल वह स्थान है जो वह घेरती है। आयत: परिमाप = 2(लंबाई + चौड़ाई), क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई। वर्ग (बराबर भुजाओं वाला आयत): परिमाप = 4 × भुजा, क्षेत्रफल = भुजा²। वृत्त: परिधि = 2πr, क्षेत्रफल = πr²। जब त्रिज्या 7 की गुणज हो तो π ≈ 22/7 का उपयोग करें (यह साफ कट जाता है); अन्यथा π ≈ 3.14 का उपयोग करें। त्रिभुज: क्षेत्रफल = (1/2) × आधार × ऊंचाई। विशेष रूप से एक समकोण त्रिभुज के लिए, समकोण पर मिलने वाली दोनों भुजाओं को सीधे आधार और ऊंचाई के रूप में उपयोग किया जा सकता है। जब केवल तीन भुजाएं a, b, c ज्ञात हों (ऊंचाई नहीं), तो हीरोन के सूत्र का उपयोग करें: क्षेत्रफल = √(s(s−a)(s−b)(s−c)), जहां s = (a+b+c)/2 अर्ध-परिमाप है। समांतर चतुर्भुज: क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई, जहां ऊंचाई समांतर भुजाओं के बीच की लंबवत दूरी है, तिरछी भुजा की लंबाई नहीं। समचतुर्भुज (सभी भुजाएं बराबर वाला समांतर चतुर्भुज): क्षेत्रफल = (1/2) × d_1 × d_2, दोनों विकर्णों का उपयोग करते हुए। समलंब (ट्रेपीज़ियम): क्षेत्रफल = (1/2) × (दोनों समांतर भुजाओं का योग) × ऊंचाई। समबाहु त्रिभुज (जहां हीरोन का सूत्र सरल हो जाता है): क्षेत्रफल = (√3/4) × भुजा²। वृत्त का खंड (सेक्टर) (पूरे 360° में से θ डिग्री का "टुकड़ा"): क्षेत्रफल = (θ/360) × πr², और चाप की लंबाई = (θ/360) × 2πr। अर्धवृत्त दोनों सूत्रों में θ = 180° रखने पर ही मिलता है। "खेत के चारों ओर रास्ता" या "सीमा" वाले प्रश्नों के लिए, बाहरी आकृति और भीतरी आकृति का क्षेत्रफल अलग-अलग निकालें, फिर घटाएं — रास्ते का क्षेत्रफल सीधे एक टुकड़े के रूप में निकालने की कोशिश न करें।

उदाहरण

- 15 m लंबाई और 8 m चौड़ाई वाले एक आयत का क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात करें। हल: क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई = 15 × 8 = 120 m² परिमाप = 2(लंबाई + चौड़ाई) = 2(15 + 8) = 2 × 23 = 46 m उत्तर: क्षेत्रफल = 120 m², परिमाप = 46 m
- एक गोलाकार पार्क की त्रिज्या 14 m है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें। (π = 22/7 का उपयोग करें।) हल: क्षेत्रफल = πr² = (22/7) × 14 × 14 14, 7 का गुणज है, तो यह साफ कट जाता है: (22/7) × 14 = 44, फिर 44 × 14 = 616 उत्तर: 616 m²
- 12 cm आधार और 9 cm ऊंचाई वाले एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें। इसके कर्ण (hypotenuse) की लंबाई भी ज्ञात करें। हल: क्षेत्रफल = (1/2) × आधार × ऊंचाई = (1/2) × 12 × 9 = 54 cm² कर्ण = √(आधार² + ऊंचाई²) = √(12² + 9²) = √(144 + 81) = √225 = 15 cm उत्तर: क्षेत्रफल = 54 cm², कर्ण = 15 cm
- एक आयताकार बगीचा 20 m लंबा और 15 m चौड़ा है। इसके चारों ओर, बाहर की तरफ, 2.5 m चौड़ा रास्ता बनाया गया है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करें। हल: रास्ता हर तरफ 2.5 m जोड़ता है, तो बाहरी आयत (20 + 2×2.5) गुणा (15 + 2×2.5) = 25 m गुणा 20 m है। बाहरी क्षेत्रफल = 25 × 20 = 500 m²। बगीचे (भीतरी) का क्षेत्रफल = 20 × 15 = 300 m²। रास्ते का क्षेत्रफल = बाहरी क्षेत्रफल − भीतरी क्षेत्रफल = 500 − 300 = 200 m² उत्तर: 200 m²
- 12 cm आधार और समांतर भुजाओं के बीच 7 cm लंबवत ऊंचाई वाले एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें। हल: क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई = 12 × 7 = 84 cm² उत्तर: 84 cm²
- एक समचतुर्भुज के विकर्ण 16 cm और 12 cm हैं। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें। हल: क्षेत्रफल = (1/2) × d_1 × d_2 = (1/2) × 16 × 12 = 96 cm² उत्तर: 96 cm²
- एक समलंब की समांतर भुजाएं 10 cm और 14 cm हैं, और उनके बीच लंबवत दूरी 6 cm है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें। हल: क्षेत्रफल = (1/2) × (समांतर भुजाओं का योग) × ऊंचाई = (1/2) × (10 + 14) × 6 = (1/2) × 24 × 6 = 72 cm² उत्तर: 72 cm²
- एक त्रिभुज की भुजाएं 13 cm, 14 cm और 15 cm हैं। हीरोन के सूत्र से इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें। हल: अर्ध-परिमाप s = (13 + 14 + 15) / 2 = 21। क्षेत्रफल = √(s(s−a)(s−b)(s−c)) = √(21 × (21−13) × (21−14) × (21−15)) = √(21 × 8 × 7 × 6) = √7,056 = 84 cm² उत्तर: 84 cm²
- Practice: 18 m लंबाई और 10 m चौड़ाई वाले एक आयत का क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात करें। (उत्तर: क्षेत्रफल = 180 m², परिमाप = 56 m)
- Practice: एक गोलाकार बगीचे की त्रिज्या 21 m है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें। (π = 22/7 का उपयोग करें।) (उत्तर: 1,386 m²)
- Practice: 10 cm आधार और 24 cm ऊंचाई वाले एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें। इसका कर्ण भी ज्ञात करें। (उत्तर: क्षेत्रफल = 120 cm², कर्ण = 26 cm)
- Practice: 15 cm आधार और 8 cm ऊंचाई वाले एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें। (उत्तर: 120 cm²। क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई।)
- Practice: एक समचतुर्भुज के विकर्ण 10 cm और 24 cm हैं। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें। (उत्तर: 120 cm²। क्षेत्रफल = (1/2) × 10 × 24।)
- Practice: एक समलंब की समांतर भुजाएं 8 cm और 12 cm हैं और ऊंचाई 5 cm है। क्षेत्रफल ज्ञात करें। (उत्तर: 50 cm²। क्षेत्रफल = (1/2) × (8+12) × 5।)
- Practice: 8 cm भुजा वाले समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें। (उत्तर: 16√3 cm² ≈ 27.7 cm²। क्षेत्रफल = (√3/4) × 8²।)
- Practice: 21 cm त्रिज्या और 60° केंद्रीय कोण वाले वृत्त-खंड का क्षेत्रफल और चाप की लंबाई ज्ञात करें। (π = 22/7 का उपयोग करें।) (उत्तर: क्षेत्रफल = 231 cm², चाप = 22 cm। क्षेत्रफल = (60/360) × (22/7) × 21²; चाप = (60/360) × 2 × (22/7) × 21।)

त्वरित दोहराव: परिमाप किसी आकृति के चारों ओर की दूरी है; क्षेत्रफल वह स्थान है जो वह घेरती है। आयत: परिमाप = 2(लंबाई + चौड़ाई), क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई। वर्ग (बराबर भुजाओं वाला आयत): परिमाप = 4 × भुजा, क्षेत्रफल = भुजा²।; वृत्त: परिधि = 2πr, क्षेत्रफल = πr²। जब त्रिज्या 7 की गुणज हो तो π ≈ 22/7 का उपयोग करें (यह साफ कट जाता है); अन्यथा π ≈ 3.14 का उपयोग करें।; त्रिभुज: क्षेत्रफल = (1/2) × आधार × ऊंचाई। विशेष रूप से एक समकोण त्रिभुज के लिए, समकोण पर मिलने वाली दोनों भुजाओं को सीधे आधार और ऊंचाई के रूप में उपयोग किया जा सकता है। जब केवल तीन भुजाएं a, b, c ज्ञात हों (ऊंचाई नहीं), तो हीरोन के सूत्र का उपयोग करें: क्षेत्रफल = √(s(s−a)(s−b)(s−c)), जहां s = (a+b+c)/2 अर्ध-परिमाप है।; समांतर चतुर्भुज: क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई, जहां ऊंचाई समांतर भुजाओं के बीच की लंबवत दूरी है, तिरछी भुजा की लंबाई नहीं। समचतुर्भुज (सभी भुजाएं बराबर वाला समांतर चतुर्भुज): क्षेत्रफल = (1/2) × d_1 × d_2, दोनों विकर्णों का उपयोग करते हुए।; समलंब (ट्रेपीज़ियम): क्षेत्रफल = (1/2) × (दोनों समांतर भुजाओं का योग) × ऊंचाई।; समबाहु त्रिभुज (जहां हीरोन का सूत्र सरल हो जाता है): क्षेत्रफल = (√3/4) × भुजा²।; वृत्त का खंड (सेक्टर) (पूरे 360° में से θ डिग्री का "टुकड़ा"): क्षेत्रफल = (θ/360) × πr², और चाप की लंबाई = (θ/360) × 2πr। अर्धवृत्त दोनों सूत्रों में θ = 180° रखने पर ही मिलता है।; "खेत के चारों ओर रास्ता" या "सीमा" वाले प्रश्नों के लिए, बाहरी आकृति और भीतरी आकृति का क्षेत्रफल अलग-अलग निकालें, फिर घटाएं — रास्ते का क्षेत्रफल सीधे एक टुकड़े के रूप में निकालने की कोशिश न करें।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/mensuration-2d/

क्षेत्रमिति: 3D — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

क्षेत्रमिति: 3D — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

आयतन घन इकाइयों में और पृष्ठीय क्षेत्रफल वर्ग इकाइयों में मापा जाता है, एक संयुक्त या खुले ठोस के लिए केवल उजागर फलक गिने जाते हैं। एक प्रिज्म का आयतन आधार क्षेत्रफल × ऊंचाई है; एक घनाभ का आयतन lbh और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 2(lb + bh + hl) है, जबकि एक घन का आयतन s^3 और पृष्ठीय क्षेत्रफल $6s^2$ है। एक बेलन का आयतन πr^2h और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $2\pi r(h + r)$ है; एक शंकु का आयतन $\pi r^2h/3$ और पार्श्व क्षेत्रफल πrl है, जहां l तिरछी ऊंचाई है। एक गोले का आयतन $4\pi r^3/3$ और पृष्ठीय क्षेत्रफल $4\pi r^2$ है, जबकि एक अर्धगोले का आयतन उसका आधा, वक्र क्षेत्रफल $2\pi r^2$ और कुल क्षेत्रफल $3\pi r^2$ (वृत्ताकार आधार सहित) है। एक नियमित पिरामिड का आयतन आधार क्षेत्रफल × लंब ऊंचाई/3 और पार्श्व क्षेत्रफल आधार परिमाप का आधा गुणा फलक तिरछी ऊंचाई है। जुड़े हुए ठोसों के लिए गैर-अतिव्यापी आयतन जोड़ें, छिपे हुए साझा फलकों को उजागर क्षेत्रफल से हटाएं, और जब कोई सामग्री न खोई जाए तो पिघलाने और पुनः ढालने में आयतन संरक्षित रखें।

एक बेलन के लिए, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल स्वाभाविक रूप से तीन भागों में बंटता है: दो वृत्ताकार सिरे (कुल $2\pi r^2$) और वक्र पक्ष ($2\pi rh$) - इसे $2\pi r(h+r)$ लिखना बस $2\pi rh + 2\pi r^2$ का गुणनखंडित रूप है, तो दोनों रूप समान उत्तर देते हैं।

एक अर्धगोले की तीन अलग क्षेत्रफल राशियां अलग रखने योग्य हैं: अकेला वक्र (गुंबद) पृष्ठ $2\pi r^2$ है, समतल वृत्ताकार आधार जोड़ने पर कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $3\pi r^2$ मिलता है, और आयतन (पूरी तरह अलग प्रकार की राशि, घन इकाइयों में मापी गई) $(2/3)\pi r^3$ है - इन्हें मिलाना त्रुटि का एक आम स्रोत है।

उदाहरण

- एक बंद घन की भुजा 5 cm है। इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल cm^2 में ज्ञात करें। हल: 6 वर्गाकार फलकों में से हर एक का क्षेत्रफल $5^2 = 25$ है। कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6 \times 25 = 150\ cm^2$ है।
- एक बंद लंब वृत्तीय शंकु की त्रिज्या 6 cm और ऊंचाई 8 cm है। π = 22/7 उपयोग करते हुए इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल cm^2 में ज्ञात करें। हल: तिरछी ऊंचाई $= \sqrt{(6^2 + 8^2)} = 10$ cm। पार्श्व क्षेत्रफल और आधार क्षेत्रफल का योग $\pi r(l + r) = (22/7) \times 6 \times (10 + 6) = 2112/7\ cm^2$ है।
- 4 cm त्रिज्या वाले एक ठोस गोले को पिघलाकर प्रत्येक 2 cm त्रिज्या वाले ठोस गोलों में ढाला जाता है, बिना किसी सामग्री हानि के। कितने छोटे गोले बनते हैं? हल: आयतन त्रिज्या के घन के समानुपाती होता है। संख्या $(4/2)^3 = 2^3 = 8$ है।
- एक बंद बेलन की त्रिज्या 7 cm और ऊंचाई 10 cm है। π = 22/7 उपयोग करते हुए इसका आयतन, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें। हल: आयतन = $\pi r^2h = (22/7)\times49\times10 = 1540\ cm^3$। वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh = 2\times(22/7)\times7\times10 = 440\ cm^2$। कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r(h+r) = 2\times(22/7)\times7\times17 = 748\ cm^2$।
- एक अर्धगोले की त्रिज्या 6 cm है। π के रूप में उत्तर छोड़ते हुए इसका आयतन, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें। हल: आयतन = $(2/3)\pi r^3 = (2/3)\pi\times216 = 144\pi\ cm^3$। वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2 = 2\pi\times36 = 72\pi\ cm^2$। कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2 = 3\pi\times36 = 108\pi\ cm^2$ - तीन वास्तव में अलग राशियां, जिन्हें आपस में भ्रमित नहीं करना चाहिए।

त्वरित दोहराव: घनाभ: आयतन=lbh, TSA=2(lb+bh+hl)। घन: आयतन=s^3, TSA=$6s^2$। बेलन: आयतन=πr^2h, CSA=$2\pi rh$, TSA=$2\pi r(h+r)$=CSA+2 वृत्ताकार सिरे। शंकु: आयतन=$\pi r^2h/3$, पार्श्व क्षेत्रफल=πrl (l=तिरछी ऊंचाई)। गोला: आयतन=$4\pi r^3/3$, SA=$4\pi r^2$। अर्धगोला: आयतन=$(2/3)\pi r^3$, वक्र क्षेत्रफल=$2\pi r^2$, कुल क्षेत्रफल=$3\pi r^2$ - तीन अलग राशियां। पिघलाना/पुनः ढालना आयतन संरक्षित रखता है, पृष्ठीय क्षेत्रफल नहीं।

मिश्रण और मिश्रण-क्रिया (एलिगेशन)

मिश्रण और एलीगेशन — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

योज्य मात्राओं के लिए, मिश्रण की इकाई कीमत या सांद्रता कुल मूल्य या घटक मात्रा को कुल मिश्रण मात्रा से विभाजित करने से मिलती है। एलीगेशन कम:अधिक मात्रा अनुपात (अधिक मान − लक्ष्य):(लक्ष्य − कम मान) के रूप में देता है जब लक्ष्य दोनों मानों के ठीक बीच हो। पानी जोड़ने से कुल आयतन

बदलता है लेकिन गैर-पानी घटक की मात्रा अपरिवर्तित रहती है। एक अच्छी तरह मिश्रित भाग को हटाने से हर घटक उसके वर्तमान अनुपात में हटता है। यदि एक निश्चित भाग को हटाकर बार-बार शुद्ध पानी से बदला जाए जबकि कुल आयतन V स्थिर रहे, तो k संक्रियाओं के बाद बचा मूल घटक उसकी शुरुआती मात्रा × (1 − हटाया गया/V)^k होता है।

जब दो पहले से मिश्रित घोल (कच्चे घटक नहीं) मिलाए जाएं, तो पहले हर घोल में रुचि के घटक की कुल मात्रा (आयतन × सांद्रता) ज्ञात करें, उन मात्राओं को जोड़ें, और संयुक्त कुल आयतन से भाग दें - यह असल में वही भारित-औसत विचार है जो कीमतें मिलाने में होता है, बस सांद्रताओं पर लागू।

बार-बार तनुकरण (dilution) सूत्र को कम से कम एक बार संख्यात्मक रूप से हल करना उपयोगी है: एक कंटेनर जो कुछ मात्रा से शुरू होता है, जिसमें से एक निश्चित मात्रा हटाकर पानी से बदली जाती है, और यह कई बार दोहराया जाता है, मूल पदार्थ को ज्यामितीय रूप से खोता है - हर संक्रिया बचे हुए को उसी बरकरार अंश से गुणा करती है, निश्चित मात्रा से नहीं, इसलिए सूत्र में घात का उपयोग होता है, सरल घटाव का नहीं।

उदाहरण

- ₹30/kg वाले 11 kg अनाज को ₹50/kg वाले 21 kg अनाज से मिलाया जाता है। बिना किसी हानि या अतिरिक्त लागत के, मिश्रण की कीमत प्रति kg रुपयों में ज्ञात करें। हल: कुल लागत = 11 × 30 + 21 × 50 = ₹1380। कुल वज़न 32 kg है, तो प्रति kg कीमत ₹43.125 है।
- 20% घोल वाले 33 लीटर में शुद्ध घोलित पदार्थ तब तक मिलाया जाता है जब तक सांद्रता 36% न हो जाए। मान लें आयतन जुड़ते हैं। कितने लीटर शुद्ध पदार्थ मिलाया गया? हल: मान लें जोड़ा गया पदार्थ x है। तो (0.20 × 33 + x)/(33 + x) = 0.36। हल करने पर x = 8.25 लीटर मिलता है।
- ₹20/kg पर 11 kg, ₹40/kg पर 16 kg, और ₹60/kg पर 21 kg मिलाएं, बिना किसी हानि या अतिरिक्त लागत के। औसत कीमत प्रति kg रुपयों में ज्ञात करें। हल: तीनों लागतों का योग ₹2120 है; कुल वज़न 48 kg है। भाग देने पर ₹265/6 प्रति kg मिलता है।
- एक कंटेनर में 40 लीटर दूध है। 8 लीटर हटाकर पानी से बदला जाता है, और यह 2 बार और दोहराया जाता है (कुल 3 संक्रियाएं)। बचा हुआ दूध ज्ञात करें। हल: बचा दूध = $40 \times (1 - 8/40)^3 = 40 \times 0.8^3 = 40 \times 0.512 = 20.48$ लीटर - हर संक्रिया बचे हुए दूध का 80% बरकरार रखती है, जो ज्यामितीय रूप से संयोजित होता है।
- 20% अल्कोहल घोल के 10 लीटर को 50% अल्कोहल घोल के 15 लीटर से मिलाया जाता है। परिणामी सांद्रता ज्ञात करें। हल: कुल अल्कोहल = 10×0.20 + 15×0.50 = 2 + 7.5 = 9.5 लीटर। कुल आयतन = 25 लीटर। सांद्रता = 9.5/25 × 100 = 38%।
- ₹60/kg वाली चाय को ₹90/kg वाली चाय से किस अनुपात में मिलाया जाए ताकि मिश्रण की कीमत ₹80/kg हो? हल: एलीगेशन से, अनुपात = (90−80):(80−60) = 10:20 = 1:2 - सस्ती चाय के हर एक भाग के लिए महंगी चाय के दो भाग।

> **त्वरित दोहराव:** मिश्रण मूल्य/सांद्रता = भारित योग/कुल मात्रा; एलीगेशन अनुपात = (अधिक − औसत):(औसत − कम)। दो घोल मिलाना: भाग देने से पहले वास्तविक घटक मात्राएं (आयतन × सांद्रता) जोड़ें। n बदलाव संक्रियाओं के बाद बरकरार अंश = (1 − हटाया/कुल)^n - एक ज्यामितीय क्षय, रैखिक नहीं।

मिश्रण और मिश्रण-क्रिया (एलिगेशन) के प्रश्न हल सहित

एलिगेशन दो अलग-अलग मूल्य की चीज़ों को इस अनुपात में मिलाने का एक शॉर्टकट है कि मिश्रण एक लक्षित औसत पर आए — यह असल में भारित-औसत सूत्र को उल्टा चलाने जैसा है। इस पेज में मुख्य नियम, बार-बार तनुकरण ("निकालो और बदलो") का प्रकार, दो से अधिक घटकों को मिलाना, और कई हल किए गए उदाहरण दिए गए हैं। एलिगेशन नियम: एक सस्ती वस्तु (मूल्य C) और एक महंगी वस्तु (मूल्य D) को इस तरह मिलाने के लिए कि मिश्रण का औसत मूल्य M हो, आवश्यक अनुपात है सस्ती : महंगी = (D − M) : (M − C)। यह तभी अर्थपूर्ण है जब M, C और D के बीच हो — यदि लक्षित औसत इस दायरे से बाहर है, तो वर्णित मिश्रण असंभव है। यह बस भारित-औसत समीकरण को पुनर्व्यवस्थित किया गया रूप है — आप हमेशा मिले अनुपात से सीधे भारित औसत निकालकर जांच सकते हैं कि वह लक्षित औसत के बराबर है या नहीं। यही नियम किसी भी "सांद्रता" वाली चीज़ पर काम करता है — दूध-पानी के मिश्रण, मिश्रधातु की संरचना, यहां तक कि दो कक्षाओं के औसत अंक मिलाने पर भी — केवल मूल्यों पर नहीं। "क्रय मूल्य बनाम विक्रय मूल्य" वाले एलिगेशन प्रश्नों के लिए (जैसे मुफ्त पानी मिलाकर दूध को पतला करके लाभ कमाना), पानी का मूल्य ₹0 मानें और अनुपात सूत्र लागू करने से पहले लाभ प्रतिशत से मिश्रण का प्रभावी क्रय मूल्य निकालें। तीन या अधिक घटकों को एक साथ मिलाने के लिए, दो-पद वाला एलिगेशन शॉर्टकट सीधे लागू नहीं होता — भारित-औसत की परिभाषा पर लौटें: सभी घटकों का कुल मूल्य ÷ कुल मात्रा। बार-बार तनुकरण ("निकालो और बदलो"): यदि किसी बर्तन में शुद्ध द्रव की मात्रा V है, और हर बार x इकाइयां निकालकर पानी से बदली जाती हैं, तो n बार ऐसा करने के बाद बचा शुद्ध द्रव = $V \times (1 - x/V)^n$ होता है। यह ज्यामितीय ह्रास है, रेखीय नहीं — सीधे nx घटाना गलत होगा।

उदाहरण

- ₹60/kg वाली चाय को ₹80/kg वाली चाय के साथ किस अनुपात में मिलाया जाए ताकि मिश्रण ₹65/kg का हो? हल: एलिगेशन नियम का उपयोग करते हुए: सस्ती : महंगी = (80 − 65) : (65 − 60) = 15 : 5 = 3 : 1। जांच: भारित औसत = (3 × 60 + 1 × 80) / 4 = (180 + 80) / 4 = 260/4 = 65 — मेल खाता है। उत्तर: 3 : 1 (₹60/kg चाय : ₹80/kg चाय)
- एक व्यापारी ₹40/kg वाले 20 kg चावल को ₹60/kg वाले 30 kg चावल के साथ मिलाता है। मिश्रण का औसत मूल्य ज्ञात करें। हल: कुल लागत = (20 × 40) + (30 × 60) = 800 + 1,800 = ₹2,600 कुल मात्रा = 20 + 30 = 50 kg औसत मूल्य = 2,600 / 50 = ₹52/kg उत्तर: ₹52/kg
- 60 लीटर के एक मिश्रण में दूध और पानी 2 : 1 के अनुपात में हैं। अनुपात को दूध:पानी = 1:2 बनाने के लिए कितना पानी मिलाना होगा? हल: दूध = (2/3) × 60 = 40 L, पानी = (1/3) × 60 = 20 L। पानी मिलाने से दूध नहीं बदलता, तो यदि x लीटर पानी मिलाया जाए: 40 / (20 + x) = 1 / 2 80 = 20 + x → x = 60 लीटर। जांच: 40 : (20 + 60) = 40 : 80 = 1 : 2। उत्तर: 60 लीटर
- एक दूधवाला पानी (मुफ्त) को दूध के साथ मिलाता है और मिश्रण को शुद्ध दूध के समान मूल्य पर बेचता है, जिससे उसे 20% का लाभ होता है। मिश्रण में पानी और दूध का अनुपात ज्ञात करें। हल: मान लें शुद्ध दूध का मूल्य (और मिश्रण का विक्रय मूल्य) = ₹6/लीटर। 20% लाभ का मतलब है मिश्रण का अपना क्रय मूल्य

= SP ÷ 1.2 = 6 ÷ 1.2 = ₹5/लीटर। पानी (₹0) को "सस्ती" वस्तु और दूध (₹6) को "महंगी" वस्तु मानकर एलिगेशन लागू करें, औसत = ₹5: पानी : दूध = (6 − 5) : (5 − 0) = 1 : 5। उत्तर: 1 : 5 (पानी : दूध)

- ₹20/kg, ₹25/kg और ₹30/kg वाले तीन प्रकार के चावल क्रमशः 10 kg, 20 kg और 30 kg में मिलाए जाते हैं। मिश्रण का औसत मूल्य ज्ञात करें। हल: तीन घटकों के साथ, दो-पद वाले एलिगेशन अनुपात के बजाय सीधे भारित-औसत परिभाषा का उपयोग करें। कुल लागत = (10 × 20) + (20 × 25) + (30 × 30) = 200 + 500 + 900 = ₹1,600 कुल मात्रा = 10 + 20 + 30 = 60 kg औसत मूल्य = 1,600 / 60 = ₹26.67/kg (80/3) उत्तर: ₹26.67/kg (80/3)
- एक बर्तन में 40 लीटर शुद्ध दूध है। 8 लीटर निकालकर पानी से बदला जाता है, और यह प्रक्रिया एक बार और दोहराई जाती है। दोनों प्रक्रियाओं के बाद बचे शुद्ध दूध की मात्रा ज्ञात करें। हल: हर प्रक्रिया में बर्तन में मौजूद मात्रा का x/V = 8/40 = 1/5 भाग निकलता है। n प्रक्रियाओं के बाद बचा शुद्ध द्रव = $V \times (1 - x/V)^n$ = $40 \times (1 - 1/5)^2 = 40 \times (4/5)^2 = 40 \times 16/25 = 25.6$ लीटर उत्तर: 25.6 लीटर
- Practice: ₹50/kg वाले चावल को ₹70/kg वाले चावल के साथ किस अनुपात में मिलाया जाए ताकि मिश्रण ₹55/kg का हो? (उत्तर: 3 : 1 (₹50/kg चावल : ₹70/kg चावल)। (70−55):(55−50) = 15:5।)
- Practice: एक दुकानदार ₹30/kg वाली 15 kg चीनी को ₹42/kg वाली 25 kg चीनी के साथ मिलाता है। मिश्रण का औसत मूल्य ज्ञात करें। (उत्तर: ₹37.50/kg। कुल लागत = 450 + 1,050 = 1,500; कुल मात्रा = 40; 1,500/40।)
- Practice: 45 लीटर के एक मिश्रण में दूध और पानी 4 : 1 के अनुपात में हैं। अनुपात को 2 : 1 बनाने के लिए कितना पानी मिलाना होगा? (उत्तर: 9 लीटर। दूध = 36 L स्थिर; 36/(9+x) = 2/1 से x = 9।)
- Practice: ₹24/kg वाले गेहूं को ₹32/kg वाले गेहूं के साथ किस अनुपात में मिलाया जाए ताकि मिश्रण ₹28/kg का हो? (उत्तर: 1 : 1। (32−28):(28−24) = 4:4।)
- Practice: ₹18/kg, ₹24/kg और ₹30/kg वाले चावल को 5 kg, 10 kg और 15 kg की मात्रा में मिलाया जाता है। औसत मूल्य ज्ञात करें। (उत्तर: ₹26/kg। कुल लागत = 90+240+450 = 780; कुल मात्रा = 30; 780/30।)
- Practice: एक बर्तन में 50 लीटर शुद्ध दूध है। 10 लीटर निकालकर पानी से बदला जाता है, और यह एक बार और दोहराया जाता है। दोनों प्रक्रियाओं के बाद बचा दूध ज्ञात करें। (उत्तर: 32 लीटर। $50 \times (1 - 10/50)^2 = 50 \times 0.64$।)
- Practice: एक बर्तन में 40 लीटर शुद्ध दूध है। 10 लीटर निकालकर पानी से बदला जाता है (एक ही प्रक्रिया)। मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात ज्ञात करें। (उत्तर: 3 : 1। बचा दूध = 30 L, पानी = 10 L।)

> **त्वरित दोहराव:** एलिगेशन नियम: एक सस्ती वस्तु (मूल्य C) और एक महंगी वस्तु (मूल्य D) को इस तरह मिलाने के लिए कि मिश्रण का औसत मूल्य M हो, आवश्यक अनुपात है सस्ती : महंगी = (D − M) : (M − C)। यह तभी अर्थपूर्ण है जब M, C और D के बीच हो — यदि लक्षित औसत इस दायरे से बाहर है, तो वर्णित मिश्रण असंभव है।; यह बस भारित-औसत समीकरण को पुनर्व्यवस्थित किया गया रूप है — आप हमेशा मिले अनुपात से सीधे भारित औसत निकालकर जांच सकते हैं कि वह लक्षित औसत के बराबर है या नहीं।; यही नियम किसी भी "सांद्रता" वाली चीज़ पर काम करता है — दूध-पानी के मिश्रण, मिश्रधातु की संरचना, यहां तक कि दो कक्षाओं के औसत अंक मिलाने पर भी — केवल मूल्यों पर नहीं।; "क्रय मूल्य बनाम विक्रय मूल्य" वाले एलिगेशन प्रश्नों के लिए (जैसे मुफ्त पानी मिलाकर दूध को पतला करके लाभ कमाना), पानी का मूल्य ₹0 मानें और अनुपात सूत्र लागू करने से पहले लाभ प्रतिशत से मिश्रण का प्रभावी क्रय मूल्य निकालें।; तीन या अधिक घटकों को एक साथ मिलाने के लिए, दो-पद वाला एलिगेशन शॉर्टकट सीधे लागू नहीं होता — भारित-औसत की परिभाषा पर लौटें: सभी घटकों का कुल मूल्य ÷ कुल मात्रा।; बार-बार तनुकरण ("निकालो और बदलो"): यदि किसी बर्तन में शुद्ध द्रव की मात्रा V है, और हर बार x इकाइयां निकालकर पानी से बदली जाती हैं, तो n बार ऐसा करने के बाद बचा शुद्ध द्रव = $V \times (1 - x/V)^n$ होता है। यह ज्यामितीय ह्रास है, रेखीय नहीं — सीधे nx घटाना गलत होगा।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/mixture-alligation/

साझेदारी (पार्टनरशिप)

साझेदारी — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

जब कोई प्रश्न निवेशित पूंजी और समय के अनुसार लाभ आवंटित करता है, तो हर साझेदार का भार उस साझेदार के निवेश अंतरालों पर पूंजी × अवधि का योग होता है। वितरण योग्य लाभ को उन भारों के अनुपात में बांटें, पूरे प्रश्न में समान समय इकाई उपयोग करते हुए। जुड़ना, छोड़ना या पूंजी बदलना संबंधित अंतरालों को बदलता है, सहमत बंटवारे के सिद्धांत को नहीं। बताया गया वेतन या कमीशन केवल तभी बंटवारे से पहले घटाया जाता है जब प्रश्न वह क्रम निर्दिष्ट करे, और कोई भी वेतन पाने वाला शेष लाभ में भी हिस्सा पा सकता है। कुल लाभ पर कमीशन को कमीशन के बाद के लाभ पर कमीशन से अलग करें, क्योंकि दूसरे के लिए समीकरण चाहिए।

जब कोई साझेदार वर्ष के बीच में पैसा निकाल ले (या बीच में जुड़े), तो उसका भार केवल उन महीनों को गिनता है जब वह वास्तव में निवेशित था - जो साझेदार ₹30,000 निवेश करता है लेकिन 8 महीने बाद छोड़ देता है, वह 30,000 × 8 का भार देता है, 30,000 × 12 का नहीं, भले ही कुल साझेदारी अवधि 12 महीने हो।

एक सरल कमीशन (कुल लाभ का सीधा प्रतिशत, शेष बांटने से पहले लिया गया) की गणना सीधे की जाती है: कमीशन = दर × कुल लाभ। यह अधिक सूक्ष्म "कमीशन के बाद के लाभ पर कमीशन" मामले से अलग है, जहां कमीशन की राशि खुद इस पर निर्भर करती है कि उसे घटाने के बाद क्या बचता है - इसके लिए समीकरण बनाना ज़रूरी है, क्योंकि अज्ञात कमीशन दोनों तरफ दिखाई देता है।

उदाहरण

- आशा ₹20000 और भरत ₹30000 समान 12 महीनों के लिए निवेश करते हैं। वे ₹6600 लाभ को पूंजी × महीनों के अनुपात में बांटते हैं। आशा का हिस्सा रुपयों में ज्ञात करें। हल: समान अवधि कट जाती है, भार 2:3 शेष रहता है। आशा को ₹6600 का 2/5, यानी ₹2640 मिलता है।
- आशा पहले 6 महीनों के लिए ₹20000 और अगले 6 महीनों के लिए ₹40000 निवेश करती है। भरत पूरे 12 महीनों के लिए ₹20000 निवेश करता है। ₹13200 लाभ पूंजी × महीनों से बांटा जाता है। आशा का हिस्सा ज्ञात करें। हल: आशा का भार 20000 × 6 + 40000 × 6 = 360000 है। भरत का 240000 है, तो अनुपात 3:2 है। आशा का हिस्सा ₹7920 है।
- कुल लाभ ₹12100 है। आशा को कमीशन के बाद बचे लाभ का 10% के बराबर कमीशन मिलता है। कमीशन रुपयों में क्या है? हल: मान लें कमीशन c है। बताया गया आधार c = (p − c)/10 देता है, तो 11c = p। तो c = 12100/11 = ₹1100।
- A पूरे 12 महीनों के लिए ₹24000 निवेश करता है। B ₹30000 निवेश करता है लेकिन 8 महीने बाद निकल जाता है। ₹11000 का लाभ पूंजी × महीनों से बांटा जाता है। हर साझेदार का हिस्सा ज्ञात करें। हल: A का भार = 24000×12 = 288000। B का भार = 30000×8 = 240000। अनुपात = 288000:240000 = 6:5। A को 6/11 × 11000 = ₹6000, और B को 5/11 × 11000 = ₹5000 मिलता है।
- ₹20000 का लाभ बांटना है जहां प्रबंधक पहले कुल लाभ पर सीधा 5% कमीशन लेता है, और शेष दो साझेदारों में बराबर बंटता है। प्रबंधक का कमीशन और हर साझेदार का हिस्सा ज्ञात करें। हल: कमीशन = 5% × 20000 = ₹1000 (सीधे गणना की गई, क्योंकि यह कुल पर आधारित है, शेष पर नहीं, इसलिए समीकरण की ज़रूरत नहीं)। शेष ₹19000 बराबर बंटता है: हर एक को ₹9500।

> **त्वरित दोहराव:** लाभ-बंटवारा भार = Σ(पूंजी × अवधि); बताया गया वेतन/कमीशन पहले घटाएं, फिर शेष लाभ इन भारों से बांटें। निकलने/जुड़ने वाले साझेदार का भार केवल उसके वास्तविक निवेशित महीने गिनता है। कुल लाभ पर कमीशन: सीधे गणना करें (दर × कुल)। कमीशन के बाद के लाभ पर कमीशन: समीकरण बनाएं, क्योंकि अज्ञात दोनों तरफ दिखता है।

साझेदारी (पार्टनरशिप) के प्रश्न हल सहित

साझेदारी के प्रश्न अनुपात और समानुपात को साझा व्यावसायिक लाभ तक बढ़ाते हैं — याद रखने वाली एक बात है कि लाभ पूंजी × समय के अनुपात में बंटता है, केवल पूंजी के अनुपात में नहीं, जब भी साझेदार अलग-अलग समय के लिए निवेश करते हैं या बीच में राशि बदलती है। इस पेज में यह मुख्य नियम, वर्ष के बीच पूंजी बदलना, देर से जुड़ने वाले साझेदार, और कार्यशील साझेदार का शुल्क शामिल है, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। यदि सभी साझेदार एक ही अवधि के लिए निवेश करते हैं, तो लाभ बस उनकी पूंजी राशियों के अनुपात में बंटता है। यदि साझेदार अलग-अलग अवधियों के लिए निवेश करते हैं, तो हर साझेदार के अनुपात का हिस्सा पूंजी × समय होता है — यही गुणनफल बंटवारा तय करता है, अकेले पूंजी राशि नहीं। यह एक गैर-स्पष्ट अनुपात पैदा कर सकता है: बहुत लंबे समय के लिए निवेश की गई छोटी पूंजी, कम समय के लिए निवेश की गई बड़ी पूंजी के बराबर या उससे भी ज़्यादा हिस्सा कमा सकती है। यदि कोई साझेदार बीच में अपनी निवेशित राशि बदलता है (जोड़ता या निकालता है), तो उसके समय को अलग-अलग हिस्सों में बांटें और हर हिस्से के लिए पूंजी × समय निकालें, फिर उन्हें जोड़कर उस साझेदार का कुल "पूंजी-महीना" पाएं। यदि कोई साझेदार दूसरों से बाद में जुड़ता है, तो उसका समय-गुणक केवल वह महीने हैं जिनमें उसकी पूंजी वास्तव में निवेशित थी, पूरी अवधि नहीं — हर साझेदार का समय इस आधार पर तय करें कि उसकी पूंजी कब व्यवसाय में आई। एक "कार्यशील साझेदार" के लिए जो व्यवसाय चलाता है और अपने निवेश के रिटर्न के ऊपर उसके लिए एक अतिरिक्त निश्चित शुल्क कमाता है: पहले कुल लाभ से शुल्क घटाएं, फिर केवल शेष राशि को पूंजी × समय के अनुपात में बांटें। उलटे प्रश्न (लाभ-बंटवारे का अनुपात देकर निवेश अनुपात पूछना) बस इसी नियम को उलटा चलाते हैं: पूंजी × समय का अनुपात = लाभ अनुपात, तो जब समय अवधि बराबर हो, पूंजी अनुपात सीधे लाभ अनुपात के बराबर होता है।

उदाहरण

- A और B ₹8,000 और ₹12,000 की पूंजी से एक व्यवसाय शुरू करते हैं, एक ही समय अवधि के लिए निवेश करते हुए। वर्ष के अंत में, उन्हें ₹5,000 का लाभ होता है। हर साझेदार का हिस्सा ज्ञात करें। हल: चूंकि समय अवधि दोनों के लिए समान है, अनुपात बस पूंजी अनुपात है: 8,000 : 12,000 = 2 : 3। A का हिस्सा = (2/5) × 5,000 = ₹2,000। B का हिस्सा = (3/5) × 5,000 = ₹3,000। उत्तर: A को ₹2,000, B को ₹3,000
- A एक व्यवसाय में ₹10,000, 12 महीनों के लिए निवेश करता है और B ₹15,000, 8 महीनों के लिए निवेश करता है। अंत में, उन्हें ₹6,200 का लाभ होता है। हर साझेदार का हिस्सा ज्ञात करें। हल: अकेली पूंजी (10,000 बनाम 15,000) उपयोग करने वाला अनुपात नहीं है, क्योंकि समय अवधियां अलग हैं — इसके बजाय पूंजी × समय का उपयोग करें। A: 10,000 × 12 = 1,20,000। B: 15,000 × 8 = 1,20,000। दोनों गुणनफल असल में बराबर हैं, तो अनुपात 1 : 1 है, भले ही पूंजी खुद बराबर नहीं थी। हर साझेदार को ₹6,200 का आधा मिलता है = ₹3,100। उत्तर: A को ₹3,100, B को ₹3,100
- A, B और C एक व्यवसाय में 2 : 3 : 5 के अनुपात में निवेश करते हैं, एक ही समय अवधि के लिए। यदि कुल लाभ ₹20,000 है, तो C का हिस्सा ज्ञात करें। हल: अनुपात पदों का योग = 2 + 3 + 5 = 10। C का हिस्सा = (5/10) × 20,000 = ₹10,000। उत्तर: ₹10,000
- A, ₹40,000 निवेश करता है और व्यवसाय चलाता है, जबकि B, ₹60,000 एक सुप्त (sleeping) साझेदार के रूप में निवेश करता है। A को कुल लाभ का 10% प्रबंधन शुल्क के रूप में मिलता है, और बाकी उनकी पूंजी के अनुपात में बंटता है। यदि कुल लाभ ₹25,000 है, तो B का कुल हिस्सा ज्ञात करें। हल: प्रबंधन शुल्क (केवल A) = 25,000 का 10% = ₹2,500। बांटने के लिए शेष लाभ = 25,000 − 2,500 = ₹22,500। पूंजी अनुपात A : B = 40,000 : 60,000 = 2 : 3। शेष में B का हिस्सा = (3/5) × 22,500 = ₹13,500। (B को कोई प्रबंधन शुल्क नहीं मिलता, तो यही B का कुल हिस्सा है।) उत्तर: ₹13,500
- A, ₹20,000 से एक व्यवसाय शुरू करता है। 4 महीनों बाद, वह ₹10,000 और जोड़ता है। B शुरुआत में ही ₹25,000 से जुड़ता है और पूरे 12 महीने निवेशित रहता है। लाभ-बंटवारे का अनुपात ज्ञात करें। हल: A की पूंजी दो हिस्सों में है: पहले 4 महीने ₹20,000, फिर बचे 8 महीने ₹30,000। A: (20,000 × 4) + (30,000 × 8) = 80,000 + 2,40,000 = 3,20,000। B: 25,000 × 12 = 3,00,000। अनुपात A : B = 3,20,000 : 3,00,000 = 32 : 30 = 16 : 15। उत्तर: 16 : 15

- A वर्ष की शुरुआत में ₹30,000 निवेश करता है। B, 3 महीने बाद ₹45,000 से जुड़ता है। उस वर्ष के लिए लाभ-बंटवारे का अनुपात ज्ञात करें। हल: A का पैसा पूरे 12 महीने निवेशित है; B का पैसा केवल बचे 12 − 3 = 9 महीनों के लिए निवेशित है। A: 30,000 × 12 = 3,60,000। B: 45,000 × 9 = 4,05,000। अनुपात A : B = 3,60,000 : 4,05,000 = 8 : 9 (दोनों को 45,000 से भाग देकर)। उत्तर: 8 : 9
- A और B एक ही समय अवधि के लिए एक व्यवसाय में निवेश करते हैं। उनके लाभ का अनुपात 4 : 5 है। यदि A ने ₹8,000 निवेश किया, तो B का निवेश ज्ञात करें। हल: चूंकि समय अवधि दोनों के लिए समान है, पूंजी अनुपात लाभ अनुपात के बराबर है: A : B = 4 : 5। 8,000 / B = 4 / 5 B = 8,000 × 5 / 4 = ₹10,000 उत्तर: ₹10,000
- Practice: P और Q ₹15,000 और ₹25,000 की पूंजी से एक व्यवसाय शुरू करते हैं, एक ही समय अवधि के लिए निवेश करते हुए। वर्ष के अंत में, उन्हें ₹8,000 का लाभ होता है। हर साझेदार का हिस्सा ज्ञात करें। (उत्तर: P को ₹3,000, Q को ₹5,000। पूंजी अनुपात 3:5, कुल 8।)
- Practice: X, ₹12,000, 4 महीनों के लिए निवेश करता है और Y, ₹8,000, 9 महीनों के लिए निवेश करता है। यदि लाभ ₹5,000 है, तो हर साझेदार का हिस्सा ज्ञात करें। (उत्तर: X को ₹2,000, Y को ₹3,000। पूंजी-महीना: X=48,000, Y=72,000, अनुपात 2:3।)
- Practice: A, B और C एक व्यवसाय में 3 : 4 : 5 के अनुपात में निवेश करते हैं, एक ही समय अवधि के लिए। यदि कुल लाभ ₹36,000 है, तो A का हिस्सा ज्ञात करें। (उत्तर: ₹9,000। (3/12) × 36,000।)
- Practice: P, ₹15,000 से एक व्यवसाय शुरू करता है। 6 महीने बाद वह ₹5,000 निकाल लेता है (₹10,000 शेष रहता है)। Q शुरुआत में ₹12,000 से जुड़ता है और पूरे वर्ष बना रहता है। उस वर्ष के लिए लाभ-बंटवारे का अनुपात ज्ञात करें। (उत्तर: 25 : 24। P: (15,000×6)+(10,000×6) = 1,50,000; Q: 12,000×12 = 1,44,000; दोनों को 6,000 से भाग दें।)
- Practice: X, ₹24,000 से एक व्यवसाय शुरू करता है। Y, 4 महीने बाद ₹36,000 से जुड़ता है। उस वर्ष के लिए लाभ-बंटवारे का अनुपात ज्ञात करें। (उत्तर: 1 : 1। X: 24,000×12 = 2,88,000; Y: 36,000×8 = 2,88,000।)
- Practice: दो साझेदार एक ही समय अवधि के लिए 3 : 7 के अनुपात में निवेश करते हैं। यदि कुल लाभ ₹40,000 है, तो हर साझेदार का हिस्सा ज्ञात करें। (उत्तर: ₹12,000 और ₹28,000। 40,000 का (3/10) और (7/10)।)
- Practice: A और B एक ही समय अवधि के लिए निवेश करते हैं। उनका लाभ क्रमशः ₹18,000 और ₹24,000 है। यदि B ने ₹40,000 निवेश किया, तो A का निवेश ज्ञात करें। (उत्तर: ₹30,000। लाभ अनुपात 18,000:24,000 = 3:4 = पूंजी अनुपात; A = 40,000 × 3/4।)

> **त्वरित दोहराव:** यदि सभी साझेदार एक ही अवधि के लिए निवेश करते हैं, तो लाभ बस उनकी पूंजी राशियों के अनुपात में बंटता है।; यदि साझेदार अलग-अलग अवधियों के लिए निवेश करते हैं, तो हर साझेदार के अनुपात का हिस्सा पूंजी × समय होता है — यही गुणनफल बंटवारा तय करता है, अकेले पूंजी राशि नहीं।; यह एक गैर-स्पष्ट अनुपात पैदा कर सकता है: बहुत लंबे समय के लिए निवेश की गई छोटी पूंजी, कम समय के लिए निवेश की गई बड़ी पूंजी के बराबर या उससे भी ज़्यादा हिस्सा कमा सकती है।; यदि कोई साझेदार बीच में अपनी निवेशित राशि बदलता है (जोड़ता या निकालता है), तो उसके समय को अलग-अलग हिस्सों में बांटें और हर हिस्से के लिए पूंजी × समय निकालें, फिर उन्हें जोड़कर उस साझेदार का कुल "पूंजी-महीना" पाएं।; यदि कोई साझेदार दूसरों से बाद में जुड़ता है, तो उसका समय-गुणक केवल वह महीने हैं जिनमें उसकी पूंजी वास्तव में निवेशित थी, पूरी अवधि नहीं — हर साझेदार का समय इस आधार पर तय करें कि उसकी पूंजी कब व्यवसाय में आई।; एक "कार्यशील साझेदार" के लिए जो व्यवसाय चलाता है और अपने निवेश के रिटर्न के ऊपर उसके लिए एक अतिरिक्त निश्चित शुल्क कमाता है: पहले कुल लाभ से शुल्क घटाएं, फिर केवल शेष राशि को पूंजी × समय के अनुपात में बांटें।; उलटे प्रश्न (लाभ-बंटवारे का अनुपात देकर निवेश अनुपात पूछना) बस इसी नियम को उलटा चलाते हैं: पूंजी × समय का अनुपात = लाभ अनुपात, तो जब समय अवधि बराबर हो, पूंजी अनुपात सीधे लाभ अनुपात के बराबर होता है।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/partnership/

क्रमचय और संचय (परम्यूटेशन और कॉम्बिनेशन) के प्रश्न हल सहित

क्रमचय और संचय (परम्यूटेशन और कॉम्बिनेशन) के प्रश्न हल सहित

पूरा विषय एक ही सवाल पर टिका है: क्या व्यवस्था का क्रम मायने रखता है? यह सही समझ लें तो सही सूत्र अपने आप मिल जाता है। इस पेज में यह मुख्य अंतर, दोहराए गए अक्षरों की व्यवस्था, "कम से कम" और "हमेशा साथ" वाले प्रकार, और कई हल किए गए उदाहरण दिए गए हैं। क्रमचय (Permutation) व्यवस्थाओं को गिनता है, जहां क्रम मायने रखता है (ABC, BCA से अलग है)। संचय (Combination) चयन को गिनता है, जहां क्रम मायने नहीं रखता (समूह {A, B, C} चुनना क्रम चाहे जो हो, वही है)। फैक्टोरियल दोनों की नींव है: n! = n × (n−1) × (n−2) × ... × 1, और परंपरा से 0! = 1। n वस्तुओं में से r लेकर क्रमचय: ${}^{n}P_{r}$ = n! / (n−r)!। n वस्तुओं में से r लेकर संचय: ${}^{n}C_{r}$ = n! / (r! × (n−r)!) — एक संचय, एक क्रमचय को r! (चुनी गई r वस्तुओं को व्यवस्थित करने के तरीकों) से भाग देकर मिलता है, क्योंकि अब क्रम मायने नहीं रखता। शब्दों पर ध्यान दें: "व्यवस्थित करें", "क्रम", "रैंक", "एक पंक्ति में खड़े होने के तरीके" क्रमचय का संकेत देते हैं। "चुनें", "चयन करें", "समिति बनाएं" (जहां केवल समूह मायने रखता है, उसके भीतर कौन क्या करता है यह नहीं) संचय का संकेत देते हैं। यदि किसी शब्द में अक्षर दोहराए गए हों, तो सभी को व्यवस्थित करना सीधे n! नहीं होता — हर अक्षर की दोहराव संख्या के फैक्टोरियल से भाग दें: व्यवस्थाएं = n! / (p! × q! × ...), जहां p, q, ... हर अलग अक्षर के दोहराव की संख्या है। मौलिक गणन सिद्धांत (fundamental counting principle): कई स्वतंत्र चरणों में होने वाले किसी कार्य के लिए, हर चरण के विकल्पों को गुणा करें। यही पासवर्ड, कोड या पंजीकरण संख्या को अंक-दर-अंक बनाने में काम आता है, न कि केवल उपसमूह गिनने में। "कम से कम" वाली शर्तें (जैसे "कम से कम 2 महिलाओं वाली समिति") आमतौर पर मामलों में बांटकर जोड़ने से (ठीक 2, ठीक 3, ...) या पूरक घटाने से (कुल तरीके घटा न्यूनतम से कम वाले तरीके) हल होती हैं — जिसमें कम मामले गिनने पड़ें वह चुनें। "दो विशेष व्यक्ति/वस्तुएं हमेशा साथ हों": उन्हें एक इकाई (ब्लॉक) मानकर चिपका दें, बची हुई इकाइयों को व्यवस्थित करें, फिर उस ब्लॉक के भीतर व्यवस्थित करने के तरीकों से गुणा करें (जोड़े के लिए 2!)।

उदाहरण

- "MANGO" शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है? हल: MANGO में 5 अलग-अलग अक्षर हैं, और उन्हें व्यवस्थित करना सभी 5 का एक क्रमचय है। व्यवस्थाओं की संख्या = 5! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120। उत्तर: 120
- 8 अलग-अलग किताबों की एक शेल्फ में से 3 किताबें कितने तरीकों से चुनी जा सकती हैं? हल: किताबें चुनना (चुना गया समूह, उनके बीच कोई क्रम नहीं) एक संचय है। ${}^{8}C_{3}$ = 8! / (3! × 5!) = (8 × 7 × 6) / (3 × 2 × 1) = 336 / 6 = 56। उत्तर: 56
- 6 लोगों के एक समूह में से एक अध्यक्ष और एक सचिव कितने तरीकों से चुने जा सकते हैं, यह मानते हुए कि एक व्यक्ति दोनों पद नहीं रख सकता? हल: दोनों पद अलग-अलग हैं (अध्यक्ष ≠ सचिव), तो किसे कौन सा पद मिलता है यह मायने रखता है — यह एक क्रमचय है। ${}^{6}P_{2}$ = 6! / 4! = 6 × 5 = 30। उत्तर: 30
- 5 पुरुषों और 4 महिलाओं में से 3 सदस्यों की एक समिति बनानी है, जिसमें ठीक 2 पुरुष और 1 महिला हो। यह कितने तरीकों से किया जा सकता है? हल: 5 में से 2 पुरुष चुनना: ${}^{5}C_{2}$ = 10। 4 में से 1 महिला चुनना: ${}^{4}C_{1}$ = 4। ये दोनों चयन स्वतंत्र हैं, तो उन्हें गुणा करें: 10 × 4 = 40। उत्तर: 40
- "BANANA" शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है? हल: BANANA में कुल 6 अक्षर हैं: B एक बार, A तीन बार, N दो बार आता है। व्यवस्थाएं = 6! / (3! × 2!) = 720 / (6 × 2) = 720 / 12 = 60। उत्तर: 60
- एक पासवर्ड में 2 अक्षर (A–Z) और उसके बाद 3 अंक (0–9) होते हैं, दोनों में दोहराव की अनुमति है। कितने अलग-अलग पासवर्ड संभव हैं? हल: यह मौलिक गणन सिद्धांत का चरण-दर-चरण उपयोग है, किसी उपसमूह का चयन नहीं। अक्षर: 2 स्थानों में हर एक के लिए 26 विकल्प = 26^2 = 676। अंक: 3 स्थानों में हर एक के लिए 10 विकल्प = 10^3 = 1,000। कुल पासवर्ड = 676 × 1,000 = 6,76,000। उत्तर: 6,76,000
- 6 पुरुषों और 4 महिलाओं में से 4 सदस्यों की एक समिति बनानी है, जिसमें कम से कम 2 महिलाएं हों। यह कितने तरीकों से किया जा सकता है? हल: महिलाओं की सही संख्या के अनुसार मामलों में बांटें: 2, 3, या 4। ठीक 2 महिलाएं, 2 पुरुष: ${}^{4}C_{2} \times {}^{6}C_{2}$ = 6 × 15 = 90। ठीक 3 महिलाएं, 1 पुरुष: ${}^{4}C_{3} \times {}^{6}C_{1}$ = 4 × 6 = 24। ठीक 4 महिलाएं, 0 पुरुष: ${}^{4}C_{4} \times {}^{6}C_{0}$ = 1 × 1 = 1। कुल = 90 + 24 + 1 = 115। उत्तर: 115
- 5 व्यक्तियों को एक पंक्ति में इस तरह कितने तरीकों से बैठाया जा सकता है कि 2 विशेष व्यक्ति हमेशा साथ बैठें? हल: 2 विशेष व्यक्तियों को एक ब्लॉक मानकर चिपका दें। इससे 4 इकाइयां बचती हैं: वह ब्लॉक और बाकी 3 व्यक्ति। ये 4 इकाइयां 4! = 24 तरीकों से व्यवस्थित हो सकती हैं। ब्लॉक के भीतर, 2 व्यक्ति 2! = 2 तरीकों से अपनी जगह बदल सकते हैं। कुल = 24 × 2 = 48। उत्तर: 48
- Practice: "CHAIR" शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है? (उत्तर: 120। सभी 5 अक्षर अलग हैं: 5!।)
- Practice: 10 विद्यार्थियों की कक्षा में से क्विज़ टीम के लिए 4 विद्यार्थी कितने तरीकों से चुने जा सकते हैं? (उत्तर: 210। ${}^{10}C_{4}$।)
- Practice: 6 पुरुषों और 5 महिलाओं में से 2 पुरुषों और 2 महिलाओं की एक समिति कितने तरीकों से बनाई जा सकती है? (उत्तर: 150। ${}^{6}C_{2} \times {}^{5}C_{2}$ = 15 × 10।)
- Practice: "LEVEL" शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है? (उत्तर: 30। L और E दोनों दो-दो बार आते हैं: 5!/(2!×2!) = 120/4।)
- Practice: एक कोड में 3 अंक (0–9) होते हैं, दोहराव की अनुमति है। कितने अलग-अलग कोड संभव हैं? (उत्तर: 1,000। मौलिक गणन सिद्धांत से 10^3।)
- Practice: 5 पुरुषों और 3 महिलाओं में से 3 सदस्यों की एक समिति बनानी है, जिसमें कम से कम 1 महिला हो। तरीकों की संख्या ज्ञात करें। (उत्तर: 46। कुल ${}^{8}C_{3}$ = 56; बिना किसी महिला के (सभी पुरुष) = ${}^{5}C_{3}$ = 10; 56 − 10।)
- Practice: 4 व्यक्तियों को एक पंक्ति में इस तरह कितने तरीकों से बैठाया जा सकता है कि 2 विशेष व्यक्ति हमेशा साथ बैठें? (उत्तर: 12। जोड़े को 1 ब्लॉक मानें (कुल 3 इकाइयां): 3! × 2! = 6 × 2।)

> **त्वरित दोहराव:** क्रमचय (Permutation) व्यवस्थाओं को गिनता है, जहां क्रम मायने रखता है (ABC, BCA से अलग है)। संचय (Combination) चयन को गिनता है, जहां क्रम मायने नहीं रखता (समूह {A, B, C} चुनना क्रम चाहे जो हो, वही है); फैक्टोरियल दोनों की नींव है: n! = n × (n−1) × (n−2) × ... × 1, और परंपरा से 0! = 1; n वस्तुओं में से r लेकर क्रमचय: ${}^{n}P_{r}$ = n! / (n−r)!। n वस्तुओं में से r लेकर संचय: ${}^{n}C_{r}$ = n! / (r! × (n−r)!) — एक संचय, एक क्रमचय को r! (चुनी गई r वस्तुओं को व्यवस्थित करने के तरीकों) से भाग देकर मिलता है, क्योंकि अब क्रम मायने नहीं रखता; शब्दों पर ध्यान दें: "व्यवस्थित करें", "क्रम", "रैंक", "एक पंक्ति में खड़े होने के तरीके" क्रमचय का संकेत देते हैं। "चुनें", "चयन करें", "समिति बनाएं" (जहां केवल समूह मायने रखता है, उसके भीतर कौन क्या करता है यह नहीं) संचय का संकेत देते हैं; यदि किसी शब्द में अक्षर दोहराए गए हों, तो सभी को व्यवस्थित करना सीधे n! नहीं होता — हर अक्षर की दोहराव संख्या के फैक्टोरियल से भाग दें: व्यवस्थाएं = n! / (p! × q! × ...), जहां p, q, ... हर अलग अक्षर के दोहराव की संख्या है; मौलिक गणन सिद्धांत (fundamental counting principle): कई स्वतंत्र चरणों में होने वाले किसी कार्य के लिए, हर चरण के विकल्पों को गुणा करें। यही पासवर्ड, कोड या पंजीकरण संख्या को अंक-दर-अंक बनाने में काम आता है, न कि केवल उपसमूह गिनने में; "कम से कम" वाली शर्तें (जैसे "कम से कम 2 महिलाओं वाली समिति") आमतौर पर मामलों में बांटकर जोड़ने से (ठीक 2, ठीक 3, ...) या पूरक घटाने से (कुल तरीके घटा न्यूनतम से कम वाले तरीके) हल होती हैं — जिसमें कम मामले गिनने पड़ें वह चुनें; "दो विशेष व्यक्ति/वस्तुएं हमेशा साथ हों": उन्हें एक इकाई (ब्लॉक) मानकर चिपका दें, बची हुई इकाइयों को व्यवस्थित करें, फिर उस ब्लॉक के भीतर व्यवस्थित करने के तरीकों से गुणा करें (जोड़े के लिए 2!)।

वृत्तीय क्रमचय (Circular Permutations) के प्रश्न हल सहित

लोगों को एक वृत्त में व्यवस्थित करना उन्हें एक पंक्ति में व्यवस्थित करने से अलग है — सभी को एक सीट घुमाने पर "वही" व्यवस्था मिलती है, तो गिनती से एक निश्चित संदर्भ बिंदु हटा दिया जाता है। इस पेज में यह मुख्य नियम, जब यह लागू नहीं होता (नंबर वाली/तय सीटें), समूह चुनकर बिठाना, और पुरुष-महिला एकांतर बैठक शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। एक वृत्ताकार मेज़ के चारों ओर n अलग-अलग लोग: (n−1)! व्यवस्थाएं, n! नहीं — एक व्यक्ति की सीट तय करने से घूर्णी दोहराव हट जाते हैं (सभी को एक सीट घुमाना अभी भी वही व्यवस्था गिना जाता है)। एक हार या कंगन के लिए (जहां इसे पलटने पर भी वही व्यवस्था मिलती है, न कि केवल घुमाने पर), 2 से भी भाग दें: (n−1)!/2। जब दो विशिष्ट लोगों को साथ बैठना हो, तो पहले उन्हें एक इकाई में जोड़ें। परिणामी (घटी हुई गिनती) इकाइयों को (गिनती−1)! का उपयोग करके एक वृत्त में व्यवस्थित करें, फिर जुड़ी जोड़ी एक-दूसरे का सामना करने के दो तरीकों के लिए 2 से गुणा करें। "साथ नहीं बैठना चाहिए" के लिए, कुल वृत्तीय व्यवस्थाएं ज्ञात करें, "साथ बैठने" की गिनती घटाएं — यह "साथ नहीं" वाले

मामलों को सीधे गिनने की कोशिश करने से तेज़ और कम त्रुटि-प्रवण है। (n−1)! नियम तब लागू होता है जब केवल सापेक्ष स्थिति मायने रखती है (बिना निशान वाली सीटों वाली सामान्य वृत्ताकार मेज़)। यदि सीटें खुद अलग पहचान वाली हों — नंबर वाली कुर्सियां, या तय दिशाएं — तो पूरे समूह को घुमाने से वास्तव में नई व्यवस्था बनती है, और गिनती सामान्य n! होती है, ठीक एक पंक्ति में लोगों को व्यवस्थित करने जैसी। n में से r लोग चुनकर उन्हें वृत्ताकार मेज़ पर बिठाने के लिए, पहले समूह को ${}^{n}C_{r}$ से चुनें, फिर उसे वृत्ताकार रूप से (r−1)! से व्यवस्थित करें: कुल = ${}^{n}C_{r} \times (r-1)!$।

उदाहरण

- 5 लोगों को एक वृत्ताकार मेज़ के चारों ओर कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है? हल: n लोगों की वृत्तीय व्यवस्थाएं = (n−1)!। = (5−1)! = 4! = 24। उत्तर: 24
- 6 अलग-अलग मोतियों को एक हार बनाने के लिए कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है? हल: एक हार को पलटा जा सकता है, तो वृत्तीय गिनती को 2 से भाग दें: (n−1)!/2। = (6−1)!/2 = 120/2 = 60। उत्तर: 60
- 4 लोगों को एक वृत्ताकार मेज़ के चारों ओर कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है यदि दो विशिष्ट लोगों को हमेशा साथ बैठना हो? हल: दो लोगों को एक इकाई में जोड़ें: इससे वृत्तीय रूप से व्यवस्थित करने के लिए 3 इकाइयां (इकाई + 2 अन्य लोग) बचती हैं। 3 इकाइयों की वृत्तीय व्यवस्थाएं = (3−1)! = 2। जुड़ी जोड़ी 2 आंतरिक क्रमों में बैठ सकती है (कोई भी व्यक्ति बाईं ओर), तो कुल = 2 × 2 = 4। उत्तर: 4
- 7 लोगों को एक वृत्ताकार मेज़ के चारों ओर कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है यदि दो विशिष्ट लोगों को कभी साथ नहीं बैठना हो? हल: 7 लोगों की कुल वृत्तीय व्यवस्थाएं = (7−1)! = 720। दोनों साथ वाली व्यवस्थाएं: उन्हें एक इकाई में जोड़ें (6 इकाइयां), वृत्तीय व्यवस्थाएं = (6−1)! = 120, × 2 आंतरिक क्रम = 240। कभी साथ नहीं = कुल − साथ = 720 − 240 = 480। उत्तर: 480
- 5 लोगों को एक वृत्ताकार मेज़ के चारों ओर कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है जिसमें 5 नंबर वाली सीटें हैं (हर सीट एक अलग, पहचानी गई स्थिति है)? हल: चूंकि सीटें खुद अलग पहचान वाली हैं, पूरे समूह को घुमाने से वास्तव में अलग व्यवस्था बनती है (व्यक्ति X अब सीट 2 के बजाय सीट 1 में है, मान लें)। तो यह सामान्य वृत्तीय मामला नहीं है — यह 5 लोगों को 5 अलग स्थानों में व्यवस्थित करने के बराबर है: 5! = 120। उत्तर: 120
- 7 लोगों में से 4 सदस्यों की एक समिति चुनकर उन्हें एक सामान्य (बिना निशान) वृत्ताकार मेज़ पर कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है? हल: पहले 4 लोग चुनें: ${}^{7}C_{4} = 35$। फिर उस समूह को वृत्ताकार रूप से व्यवस्थित करें: (4−1)! = 6। कुल = 35 × 6 = 210। उत्तर: 210
- 4 पुरुषों और 4 महिलाओं को एक वृत्ताकार मेज़ पर इस तरह कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है कि पुरुष और महिलाएं एकांतर (alternate) क्रम में हों? हल: घूर्णी दोहराव हटाने के लिए एक पुरुष की सीट तय करें। बाकी 3 पुरुष अन्य 3 "पुरुष" सीटों में 3! तरीकों से व्यवस्थित हो सकते हैं। 4 महिलाएं पुरुषों के बीच की 4 सीटों में 4! तरीकों से बैठती हैं। कुल = 3! × 4! = 6 × 24 = 144। उत्तर: 144
- Practice: 6 लोगों को एक वृत्ताकार मेज़ के चारों ओर कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है? (उत्तर: 120)
- Practice: 5 अलग-अलग मोतियों को एक हार बनाने के लिए कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है? (उत्तर: 12)
- Practice: 5 लोगों को एक वृत्ताकार मेज़ के चारों ओर कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है यदि दो विशिष्ट लोगों को हमेशा साथ बैठना हो? (उत्तर: 12)
- Practice: 6 लोगों को 6 नंबर वाली सीटों वाली एक वृत्ताकार मेज़ पर कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है? (उत्तर: 720 (= 6!, क्योंकि सीटें अलग पहचान वाली हैं)।)
- Practice: 6 लोगों में से 3 सदस्यों की एक समिति चुनकर उन्हें एक सामान्य वृत्ताकार मेज़ पर कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है? (उत्तर: 40। ${}^{6}C_{3} \times (3-1)! = 20 \times 2$।)
- Practice: 3 पुरुषों और 3 महिलाओं को एक वृत्ताकार मेज़ पर इस तरह कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है कि पुरुष और महिलाएं एकांतर क्रम में हों? (उत्तर: 12। (3−1)! × 3! = 2 × 6।)
- Practice: 8 लोगों को एक वृत्ताकार मेज़ के चारों ओर कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है यदि दो विशिष्ट लोगों को कभी साथ नहीं बैठना हो? (उत्तर: 3,600। कुल (8−1)! = 5,040; साथ = (7−1)!×2 = 1,440; 5,040 − 1,440।)

> **त्वरित दोहराव:** एक वृत्ताकार मेज़ के चारों ओर n अलग-अलग लोग: (n−1)! व्यवस्थाएं, n! नहीं — एक व्यक्ति की सीट तय करने से घूर्णी दोहराव हट जाते हैं (सभी को एक सीट घुमाना अभी भी वही व्यवस्था गिना जाता है); एक हार या कंगन के लिए (जहां इसे पलटने पर भी वही व्यवस्था मिलती है, न कि केवल घुमाने पर), 2 से भी भाग दें: (n−1)!/2; जब दो विशिष्ट लोगों को साथ बैठना हो, तो पहले उन्हें एक इकाई में जोड़ें। परिणामी (घटी हुई गिनती) इकाइयों को (गिनती−1)! का उपयोग करके एक वृत्त में व्यवस्थित करें, फिर जुड़ी जोड़ी एक-दूसरे का सामना करने के दो तरीकों के लिए 2 से गुणा करें; "साथ नहीं बैठना चाहिए" के लिए, कुल वृत्तीय व्यवस्थाएं ज्ञात करें, "साथ बैठने" की गिनती घटाएं — यह "साथ नहीं" वाले मामलों को सीधे गिनने की कोशिश करने से तेज़ और कम त्रुटि-प्रवण है; (n−1)! नियम तब लागू होता है जब केवल सापेक्ष स्थिति मायने रखती है (बिना निशान वाली सीटों वाली सामान्य वृत्ताकार मेज़)। यदि सीटें खुद अलग पहचान वाली हों — नंबर वाली कुर्सियां, या तय दिशाएं — तो पूरे समूह को घुमाने से वास्तव में नई व्यवस्था बनती है, और गिनती सामान्य n! होती है, ठीक एक पंक्ति में लोगों को व्यवस्थित करने जैसी; n में से r लोग चुनकर उन्हें वृत्ताकार मेज़ पर बिठाने के लिए, पहले समूह को ${}^{n}C_{r}$ से चुनें, फिर उसे वृत्ताकार रूप से (r−1)! से व्यवस्थित करें: कुल = ${}^{n}C_{r} \times (r-1)!$।

उम्र पर आधारित

उम्र पर आधारित प्रश्न: एक चर, आगे ले जाना

एक अज्ञात आयु को एक चर दें (आमतौर पर जो सबसे सरल अनुपात या संबंध में दिखाई दे), फिर प्रश्न की हर दूसरी आयु को उसी चर के रूप में व्यक्त करें। "A, B से दोगुना बड़ा है" का अर्थ है A = 2B - वाक्यों का अनुवाद उसी कर्ता-पहले क्रम में करें जिसमें वे लिखे गए हैं, उल्टा नहीं। "N वर्ष बाद" या "N वर्ष पहले" वाली शर्तों के लिए, प्रश्न के हर व्यक्ति की आयु में N जोड़ें या घटाएं, उस व्यक्ति सहित जो पहले से x के रूप में परिभाषित है - एक व्यक्ति की आयु

समायोजित करना भूल जाना यहां सबसे आम गलती है। जब अनुपात सीधे दिया गया हो (जैसे "आयु 3 : 5 के अनुपात में है"), तो दो अलग अज्ञात के बजाय एक ही गुणक - 3x और 5x - उपयोग करें, जिससे प्रश्न एक चर वाला बन जाता है जो केवल एक और समीकरण से हल हो सकता है।

याद रखने योग्य एक शक्तिशाली शॉर्टकट:
दो व्यक्तियों की आयु के बीच का अंतर समय के साथ कभी नहीं बदलता। यदि आज एक पिता अपने बेटे से 30 वर्ष बड़ा है, तो वह दस वर्ष पहले भी 30 वर्ष बड़ा था और बीस वर्ष बाद भी 30 वर्ष बड़ा रहेगा। इस अपरिवर्तनीय तथ्य को पहचानना अक्सर उन प्रश्नों को छोटा कर देता है जो अन्यथा दो चर की मांग करते दिखते हैं - एक बार आयु का अंतर पता चल जाए, तो केवल एक भविष्य या भूत अनुपात की शर्त दोनों वास्तविक आयु तुरंत निर्धारित कर देती है।

जब कोई प्रश्न तीन व्यक्तियों को एक श्रृंखला में जोड़े - "A, B से दोगुना बड़ा है, और B, C से तीन गुना बड़ा है" - तो चर को श्रृंखला के अंत वाले व्यक्ति (C, जिसके साथ सबसे कम गुणक जुड़े हैं) को दें और बाकी सबको श्रृंखला में पीछे जाते हुए व्यक्त करें (B = 3x, A = 2×3x = 6x)। इससे हर आयु एक ही x का साफ गुणज बनी रहती है, ठीक वैसे ही जैसे अनुपात वाले मामले में होता है।

कुछ प्रश्न योग-आधारित सेटअप के लिए भूतकाल की बजाय भविष्य की शर्त देते हैं: "दो वर्तमान आयु का योग S है; N वर्ष बाद, एक दूसरे से M गुना होगी।" तरीका "N वर्ष पहले" वाले योग मामले जैसा ही है - एक आयु को x और दूसरी को (S − x) के रूप में व्यक्त करें, भविष्य की शर्त के लिए दोनों में N जोड़ें, और परिणामी एकल समीकरण हल करें। कभी-कभी एक प्रश्न एक ही दो व्यक्तियों पर भूतकाल और भविष्य दोनों अनुपात शर्तें जोड़ता है - यह अभी भी प्रति व्यक्ति एक चर (दो अज्ञात, दो समीकरण) में सिमट जाता है, जिसे अनुपात-गुणक तरकीब के बजाय मानक युगपत समीकरण विधि से हल किया जाता है।

उदाहरण

- एक पिता अपने बेटे से 3 गुना बड़ा है; 12 वर्ष बाद वह दोगुना बड़ा होगा: 3x+12 = 2(x+12) से x=12 मिलता है, तो बेटा 12 और पिता 36 वर्ष का है।
- A और B की वर्तमान आयु 4:5 के अनुपात में है; 8 वर्ष पहले अनुपात 3:4 था: (4x-8)/(5x-8) = 3/4 से x=8 मिलता है, तो A 32 और B 40 वर्ष का है।
- एक माँ और बेटी की आयु का योग 40 है; 5 वर्ष पहले माँ बेटी से 4 गुना बड़ी थी: (35-x) = 4(x-5) से x=11 मिलता है, तो बेटी 11 और माँ 29 वर्ष की है।
- आज एक पिता 45 और उसका बेटा 15 वर्ष का है, अंतर 30 वर्ष। दस वर्ष पहले वे 35 और 5 वर्ष के थे (अभी भी 30 का अंतर); बीस वर्ष बाद वे 65 और 35 वर्ष के होंगे (अभी भी 30 का अंतर) - दो व्यक्तियों की आयु के बीच का अंतर कभी नहीं बदलता।
- A, B से दोगुना बड़ा है, और B, C से तीन गुना बड़ा है। यदि उनकी आयु का योग 50 है: मान लें C = x, तो B = 3x और A = 6x; फिर 6x+3x+x = 10x = 50 से x = 5 मिलता है, तो C 5, B 15, और A 30 वर्ष का है।
- एक माँ और बेटी की वर्तमान आयु का योग 50 है। 5 वर्ष बाद, माँ उस समय बेटी से 3 गुना बड़ी होगी: बेटी की वर्तमान आयु x मानने पर, (50-x+5) = 3(x+5) से x = 10 मिलता है, तो बेटी 10 और माँ 40 वर्ष की है - जांच: 5 वर्ष बाद, 45 = 3×15।
- 5 वर्ष पहले, A की आयु B की आयु से 3 गुना थी; अब से 5 वर्ष बाद, A की आयु B की आयु से 2 गुना होगी। दो समीकरण A−5=3(B−5) और A+5=2(B+5) को एक साथ हल करने पर B=15 और A=35 मिलता है।

> **त्वरित दोहराव:** x को एक आयु दें, बाकी सबको x के रूप में व्यक्त करें। 'बाद/पहले N वर्ष' हर आयु में N जोड़ता/घटाता है। दिया गया अनुपात एक गुणक (3x, 5x) बनता है, दो अलग अज्ञात नहीं। दो व्यक्तियों की आयु का अंतर समय के साथ स्थिर रहता है - एक शक्तिशाली शॉर्टकट। तीन-व्यक्ति श्रृंखला: सबसे कम गुणक वाले व्यक्ति को x दें। एक ही जोड़े पर दो समय शर्तें (भूत और भविष्य) युगपत समीकरण मांगती हैं।

उम्र पर आधारित प्रश्न हल सहित

उम्र पर आधारित प्रश्न असल में छुपा हुआ बीजगणित हैं — एक उम्र को एक चर मान लें, बाकी हर उम्र को उसी चर के रूप में व्यक्त करें, और दिया गया संबंध एक हल करने योग्य समीकरण बन जाता है। इस पेज में यह तरीका, उम्र-अंतर की जाँच, दो अज्ञातों वाले दो-शर्त प्रश्न, और कई हल किए गए उदाहरण दिए गए हैं। एक अज्ञात उम्र को एक चर मान लें (आमतौर पर जो सबसे सरल अनुपात या संबंध में दिखाई देता है), फिर प्रश्न में हर दूसरी उम्र को उसी चर के रूप में व्यक्त करें। "A, B से दोगुना बड़ा है" का मतलब है A = 2B — वाक्यों को उसी कर्ता-पहले क्रम में अनुवाद करें जिसमें वे लिखे गए हैं, उल्टा नहीं। "N वर्ष बाद" या "N वर्ष पहले" वाली शर्तों के लिए, प्रश्न में हर व्यक्ति की उम्र में N जोड़ें या घटाएं, उस व्यक्ति सहित जो पहले से x के रूप में परिभाषित है — किसी एक व्यक्ति की उम्र समायोजित करना भूल जाना यहां सबसे आम गलती है। जब सीधे एक अनुपात दिया गया हो (जैसे, "उम्रें 3 : 5 के अनुपात में हैं"), तो दो अलग-अलग अज्ञातों के बजाय एक ही गुणक का उपयोग करें — 3x और 5x। यह समस्या को एक चर में बदल देता है, जो प्रश्न के बाकी हिस्से से केवल एक और समीकरण के साथ हल करने योग्य हो जाता है। उपयोगी जाँच: किसी भी दो व्यक्तियों की उम्र का अंतर समय के साथ कभी नहीं बदलता। यदि आप इसे वर्तमान उम्रों से एक बार निकाल लें, तो यह प्रश्न में बताए गए हर अन्य समय पर भी वही रहना चाहिए — यह गणना की गलती पकड़ने का एक तेज़ तरीका है। जब प्रश्न दो अलग-अलग समयों पर दो शर्तें दे और असल में दो अज्ञात हों (शुरुआत में सीधा अनुपात न हो), तो दोनों को एक जैसे दो चरों में दो समीकरण बनाएं और प्रतिस्थापन या व्युत्क्रमण (elimination) से साथ हल करें। हल करने के बाद, प्रश्न की हर शर्त से दोबारा जांचें, न कि केवल उस आखिरी शर्त से जिससे आपने x निकाला — जो मान एक शर्त पूरी करे पर दूसरी नहीं, वह बताता है कि पहले कोई चरण गलत हुआ।

उदाहरण

- एक पिता अपने बेटे से 3 गुना बड़ा है। 12 वर्ष बाद, पिता अपने बेटे से दोगुना बड़ा होगा। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। हल: मान लें बेटे की वर्तमान उम्र = x, तो पिता की वर्तमान उम्र = 3x। 12 वर्ष बाद: पिता = 3x + 12, बेटा = x + 12। दिया गया है: 3x + 12 = 2(x + 12) → 3x + 12 = 2x + 24 → x = 12। बेटा = 12, पिता = 36। जांच: 12 वर्ष बाद, पिता = 48, बेटा = 24, और 48 = 2 × 24। उत्तर: बेटा = 12 वर्ष, पिता = 36 वर्ष
- A और B की वर्तमान उम्रों का अनुपात 4 : 5 है। 8 वर्ष पहले, उनकी उम्रों का अनुपात 3 : 4 था। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। हल: मान लें A = 4x और B = 5x। 8 वर्ष पहले: A − 8 = 4x − 8, B − 8 = 5x − 8। दिया गया है: (4x − 8) / (5x − 8) = 3 / 4। क्रॉस-गुणन करें: 4(4x − 8) = 3(5x − 8) → 16x − 32 = 15x

− 24 → x = 8। A = 4 × 8 = 32, B = 5 × 8 = 40। जांच: 8 वर्ष पहले, A = 24, B = 32, और 24 : 32 = 3 : 4। उत्तर: A = 32 वर्ष, B = 40 वर्ष

- 5 वर्ष पहले, रोहन की उम्र उसकी बेटी की उम्र से तीन गुना थी। अब से 10 वर्ष बाद, रोहन की उम्र उसकी बेटी की उम्र से दोगुनी होगी। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। हल: मान लें बेटी की वर्तमान उम्र = x और रोहन की वर्तमान उम्र = y। 5 वर्ष पहले: y − 5 = 3(x − 5) → y = 3x − 10 ... (1) अब से 10 वर्ष बाद: y + 10 = 2(x + 10) → y = 2x + 10 ... (2) (1) = (2) रखने पर: 3x − 10 = 2x + 10 → x = 20। फिर y = 2(20) + 10 = 50। उत्तर: बेटी = 20 वर्ष, रोहन = 50 वर्ष
- एक मां और उसकी बेटी की वर्तमान उम्रों का योग 40 वर्ष है। 5 वर्ष पहले, मां की उम्र बेटी की उम्र से 4 गुना थी। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। हल: मान लें बेटी की वर्तमान उम्र = x, तो मां की वर्तमान उम्र = 40 − x। 5 वर्ष पहले: बेटी = x − 5, मां = 35 − x। दिया गया है: 35 − x = 4(x − 5) → 35 − x = 4x − 20 → 55 = 5x → x = 11। बेटी = 11, मां = 40 − 11 = 29। जांच: 5 वर्ष पहले, बेटी = 6, मां = 24, और 24 = 4 × 6। उत्तर: बेटी = 11 वर्ष, मां = 29 वर्ष
- एक दादा अपने पोते से 4 गुना बड़े हैं। 8 वर्ष में, दादा अपने पोते से 3 गुना बड़े होंगे। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। हल: मान लें पोते की वर्तमान उम्र = x, तो दादा की वर्तमान उम्र = 4x। 8 वर्ष में: 4x + 8 = 3(x + 8) → 4x + 8 = 3x + 24 → x = 16। पोता = 16, दादा = 64। जांच: 8 वर्ष में, पोता = 24, दादा = 72, और 72 = 3 × 24। उत्तर: पोता = 16 वर्ष, दादा = 64 वर्ष
- 5 वर्ष पहले, A और B की उम्रों का अनुपात 3 : 5 था। अब से 10 वर्ष बाद, यह अनुपात 3 : 4 होगा। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। हल: मान लें वर्तमान उम्रें A और B हैं। 5 वर्ष पहले: (A−5)/(B−5) = 3/5 → 5A − 25 = 3B − 15 → 5A − 3B = 10 ... (1) अब से 10 वर्ष बाद: (A+10)/(B+10) = 3/4 → 4A + 40 = 3B + 30 → 4A − 3B = −10 ... (2) (1) से (2) घटाएं: A = 20। (2) में रखें: 4(20) − 3B = −10 → 80 − 3B = −10 → B = 30। जांच: 5 वर्ष पहले, 15 : 25 = 3 : 5। 10 वर्ष बाद, 30 : 40 = 3 : 4। दोनों मेल खाते हैं। उत्तर: A = 20 वर्ष, B = 30 वर्ष
- एक पिता और उसके बेटे की उम्रों का अंतर 24 वर्ष है। 4 वर्ष में, पिता अपने बेटे से 4 गुना बड़े होंगे। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। हल: मान लें बेटे की वर्तमान उम्र = x, तो पिता की वर्तमान उम्र = x + 24 (अंतर समय के साथ हमेशा 24 वर्ष रहता है)। 4 वर्ष में: (x + 24) + 4 = 4(x + 4) → x + 28 = 4x + 16 → 3x = 12 → x = 4। बेटा = 4, पिता = 28। अंतर जांचें: 28 − 4 = 24। शर्त जांचें: 4 वर्ष में, पिता = 32, बेटा = 8, और 32 = 4 × 8। उत्तर: बेटा = 4 वर्ष, पिता = 28 वर्ष
- Practice: एक मां अपने बेटे से 4 गुना बड़ी है। 20 वर्ष बाद, वह अपने बेटे से दोगुनी बड़ी होगी। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। (उत्तर: बेटा = 10 वर्ष, मां = 40 वर्ष)
- Practice: P और Q की वर्तमान उम्रों का अनुपात 5 : 7 है। 6 वर्ष पहले, उनकी उम्रों का अनुपात 2 : 3 था। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। (उत्तर: P = 30 वर्ष, Q = 42 वर्ष)
- Practice: 6 वर्ष पहले, एक व्यक्ति अपने बेटे से 4 गुना बड़ा था। अब से 6 वर्ष बाद, वह अपने बेटे से दोगुना बड़ा होगा। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। (उत्तर: बेटा = 12 वर्ष, व्यक्ति = 30 वर्ष)
- Practice: एक मां अपनी बेटी से 5 गुना बड़ी है। 6 वर्ष में, वह अपनी बेटी से 3 गुना बड़ी होगी। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। (उत्तर: बेटी = 6 वर्ष, मां = 30 वर्ष। 5x+6 = 3(x+6) से x = 6।)
- Practice: 5 वर्ष पहले, X और Y की उम्रों का अनुपात 1 : 2 था। अब से 10 वर्ष बाद, यह अनुपात 2 : 3 होगा। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। (उत्तर: X = 20 वर्ष, Y = 35 वर्ष। (X−5)/(Y−5)=1/2 और (X+10)/(Y+10)=2/3 को साथ हल करें।)
- Practice: दो मित्रों की उम्रों का अंतर 15 वर्ष है। 8 वर्ष पहले, बड़ा मित्र छोटे से दोगुना बड़ा था। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। (उत्तर: छोटा = 23 वर्ष, बड़ा = 38 वर्ष। बड़ा = छोटा+15; 8 वर्ष पहले, (छोटा+15−8) = 2(छोटा−8)।)
- Practice: एक पुरुष और उसकी पत्नी की वर्तमान उम्रों का योग 72 वर्ष है। 4 वर्ष पहले, उनकी उम्रों का अनुपात 5 : 3 था। उनकी वर्तमान उम्रें ज्ञात करें। (उत्तर: पुरुष = 44 वर्ष, पत्नी = 28 वर्ष। (M−4)/(W−4)=5/3 और M+W=72।)

> **त्वरित दोहराव:** एक अज्ञात उम्र को एक चर मान लें (आमतौर पर जो सबसे सरल अनुपात या संबंध में दिखाई देता है), फिर प्रश्न में हर दूसरी उम्र को उसी चर के रूप में व्यक्त करें।; "A, B से दोगुना बड़ा है" का मतलब है A = 2B — वाक्यों को उसी कर्ता-पहले क्रम में अनुवाद करें जिसमें वे लिखे गए हैं, उल्टा नहीं।; "N वर्ष बाद" या "N वर्ष पहले" वाली शर्तों के लिए, प्रश्न में हर व्यक्ति की उम्र में N जोड़ें या घटाएं, उस व्यक्ति सहित जो पहले से x के रूप में परिभाषित है — किसी एक व्यक्ति की उम्र समायोजित करना भूल जाना यहां सबसे आम गलती है।; जब सीधे एक अनुपात दिया गया हो (जैसे, "उम्रें 3 : 5 के अनुपात में हैं"), तो दो अलग-अलग अज्ञातों के बजाय एक ही गुणक का उपयोग करें — 3x और 5x। यह समस्या को एक चर में बदल देता है, जो प्रश्न के बाकी हिस्से से केवल एक और समीकरण के साथ हल करने योग्य हो जाता है।; उपयोगी जाँच: किसी भी दो व्यक्तियों की उम्र का अंतर समय के साथ कभी नहीं बदलता। यदि आप इसे वर्तमान उम्रों से एक बार निकाल लें, तो यह प्रश्न में बताए गए हर अन्य समय पर भी वही रहना चाहिए — यह गणना की गलती पकड़ने का एक तेज़ तरीका है।; जब प्रश्न दो अलग-अलग समयों पर दो शर्तें दे और असल में दो अज्ञात हों (शुरुआत में सीधा अनुपात न हो), तो दोनों को एक जैसे दो चरों में दो समीकरण बनाएं और प्रतिस्थापन या व्युत्क्रमण (elimination) से साथ हल करें।; हल करने के बाद, प्रश्न की हर शर्त से दोबारा जांचें, न कि केवल उस आखिरी शर्त से जिससे आपने x निकाला — जो मान एक शर्त पूरी करे पर दूसरी नहीं, वह बताता है कि पहले कोई चरण गलत हुआ।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/problems-on-ages/

लाभ और हानि

लाभ, हानि और छूट — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

लागत मूल्य में वस्तु प्राप्त करने या तैयार करने से स्पष्ट रूप से जुड़ी सभी लागतें शामिल होती हैं, जबकि लाभ या हानि विक्रय मूल्य और लागत मूल्य के अंतर के बराबर होती है। लाभ और हानि प्रतिशत लागत मूल्य को आधार बनाते हैं, लेकिन छूट प्रतिशत अंकित मूल्य को आधार बनाता है। क्रमागत छूट बरकरार-

मूल्य गुणकों को गुणा करती हैं, तो उन्हें आमतौर पर जोड़ा नहीं जा सकता। लागत या अंकित मूल्य वापस पाने के लिए, अंतिम विक्रय मूल्य को संबंधित गुणक से विभाजित करें। गलत-वज़न वाले लेनदेन के लिए, बिल की गई मात्रा के राजस्व की तुलना वास्तव में दी गई मात्रा की लागत से करें, बताई गई खरीद लागत और बिलिंग नियम का उपयोग करते हुए।

एक बेईमान विक्रेता जो लागत मूल्य पर बेचने का दावा करता है लेकिन झूठा (हल्का) वज़न उपयोग करता है, वह फिर भी वास्तविक लाभ कमाता है: यदि कोई विक्रेता 1000 g का बिल बनाता है लेकिन वास्तव में केवल 900 g देता है (जबकि 1000 g की कीमत वसूलता है), तो लाभ प्रतिशत एक सामान्य लाभ प्रश्न की तरह ही निकाला जाता है, जिसमें "लागत" वास्तव में दिए गए 900 g हैं और "विक्रय मूल्य" उसके लिए वसूली गई 1000 g के बराबर राशि है।

छूट के बाद अंतिम विक्रय मूल्य दिए जाने पर, अंकित मूल्य विभाजन से (घटाव से नहीं) वापस पाया जाता है: यदि 10% छूट लागू की गई थी, तो विक्रय मूल्य अंकित मूल्य का 90% है, तो अंकित मूल्य = विक्रय मूल्य ÷ 0.90, कभी विक्रय मूल्य × 1.10 नहीं (यह अति-सुधार करता है, क्योंकि 1.10 एक जोड़ को पूर्ववत करेगा, प्रतिशत-का गुणन को नहीं)।

उदाहरण

- एक वस्तु की कीमत ₹440 है और यह ₹488.4 में बिकती है। लागत मूल्य पर लाभ प्रतिशत ज्ञात करें। हल: लाभ = 488.4 − 440 = 48.4। लागत ₹440 से भाग देकर 100 से गुणा करने पर 11% मिलता है।
- अंकित मूल्य ₹1600 है। 10% और 20% की क्रमागत छूट लागू की जाती हैं, दूसरी पहले से छूट प्राप्त मूल्य पर। अंतिम मूल्य रुपयों में ज्ञात करें। हल: 10% छूट के बाद मूल्य ₹1440 है। उसका 80% बरकरार रखने पर ₹1152 मिलता है; संयुक्त बरकरार गुणक 0.9 × 0.8 = 0.72 है।
- ₹550 की लागत वाली एक वस्तु को लागत से 50% ऊपर अंकित किया जाता है और फिर उस अंकित मूल्य पर 20% छूट पर बेचा जाता है। लागत पर लाभ प्रतिशत ज्ञात करें। हल: अंकित मूल्य = 550 × 1.50 = ₹825। विक्रय मूल्य 825 × 0.80 = ₹660 है। लागत पर लाभ (110/550) × 100 = 20% है।
- एक विक्रेता लागत मूल्य पर बेचने का दावा करता है लेकिन हर बिल किए गए "किलोग्राम" के लिए 1000 g के बजाय 900 g वज़न उपयोग करता है। उसका वास्तविक लाभ प्रतिशत ज्ञात करें। हल: वह केवल 900 g देता है (उसकी वास्तविक लागत) जबकि 1000 g के लिए वसूलता है (उसका प्रभावी विक्रय मूल्य)। लाभ % = (1000−900)/900 × 100 = 100/9 ≈ 11.11%।
- 10% छूट के बाद, एक वस्तु ₹720 में बिकती है। इसका अंकित मूल्य ज्ञात करें। हल: विक्रय मूल्य = 0.90 × अंकित मूल्य, तो अंकित मूल्य = 720 ÷ 0.90 = ₹800 - भाग देकर, घटाकर या 10% वापस जोड़कर नहीं।
- ₹500 की लागत वाली एक वस्तु ₹450 में बेची जाती है। हानि प्रतिशत ज्ञात करें। हल: हानि = 500 − 450 = 50। हानि % = (50/500) × 100 = 10%।
- एक दुकानदार माल को लागत से 40% ऊपर अंकित करता है और अंकित मूल्य पर 25% की छूट देता है। कुल लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात करें। हल: कुल गुणक = 1.40 × 0.75 = 1.05, यानी अंतिम विक्रय मूल्य लागत का 105% है - 5% का लाभ।

> **त्वरित दोहराव:** लाभ/हानि% लागत मूल्य उपयोग करता है; छूट% अंकित मूल्य उपयोग करता है; विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य × बरकरार छूट गुणक (क्रमागत छूट गुणा होती हैं, जुड़ती नहीं)। सभी बताई गई लागतें शामिल करें। झूठे-वज़न विक्रेता: लाभ% = (दावा किया गया−वास्तविक)/वास्तविक × 100। छूट वाले विक्रय मूल्य से अंकित मूल्य वापस पाना: बरकरार अंश से भाग दें, छूट% कभी वापस न जोड़ें।

लाभ और हानि के प्रश्न हल सहित

लाभ और हानि सीधे प्रतिशत पर आधारित है, और दोनों अक्सर एक साथ परखे जाते हैं — अंकित मूल्य और छूट वाला सवाल असल में एक अलग रूप में प्रतिशत का ही सवाल होता है। इस पेज में मुख्य सूत्र, परीक्षाओं में आम झूठे-बाट और मार्कअप-छूट वाले प्रश्न, कई हल किए गए उदाहरण, और स्पष्टीकरण सहित अभ्यास प्रश्न दिए गए हैं। लाभ = विक्रय मूल्य (SP) − क्रय मूल्य (CP), जब SP > CP हो। हानि = CP − SP, जब CP > SP हो। लाभ% या हानि% हमेशा क्रय मूल्य (CP) पर निकाला जाता है, जब तक प्रश्न में स्पष्ट रूप से कुछ और न कहा गया हो: (लाभ या हानि / CP) × 100। व्यावसायिक "मार्जिन" SP के आधार पर निकाला जाता है — समान रुपये के लाभ के लिए ये दोनों प्रतिशत अलग होते हैं, इसलिए हमेशा जांचें कि प्रश्न किस आधार की बात कर रहा है। छूट हमेशा अंकित मूल्य (MP) पर निकाली जाती है, क्रय मूल्य पर नहीं: SP = MP × (1 − छूट%/100)। इसे CP से गड्डमड्ड करना सबसे आम गलती है। जब किसी वस्तु को a% बढ़ाकर अंकित किया जाता है और फिर b% की छूट दी जाती है, तो शुद्ध लाभ पर प्रभाव वही क्रमिक-परिवर्तन सूत्र होता है जो प्रतिशत में है: शुद्ध% = a + b + (ab/100)। इसका अर्थ यह भी है कि समान आकार का मार्कअप और छूट कभी रद्द नहीं होते — परिणाम हमेशा शुद्ध हानि होता है (नीचे उदाहरण देखें)। झूठे बाट/माप वाले प्रश्न ("कीमत पर बेचने का दावा करता है लेकिन कम वज़न देता है") असल में छिपे हुए लाभ के प्रश्न हैं: व्यापारी का लाभ% = (अंतर / वास्तव में दी गई मात्रा) × 100, जहां अंतर = दावा की गई मात्रा − वास्तविक मात्रा। एक उपयोगी पहचान: यदि दो वस्तुएं समान विक्रय मूल्य पर बेची जाती हैं, एक पर x% लाभ और दूसरे पर x% हानि, तो कुल परिणाम हमेशा (x/10)% का वर्ग, यानी (x^2/100)%, की हानि होता है — बराबरी कभी नहीं होती, भले ही +x% और −x% रद्द होते दिखें। क्रमिक छूट (जैसे "20% छूट, फिर अतिरिक्त 10% छूट") भी क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन की तरह जुड़ती है, छूट प्रतिशतों को सीधे जोड़कर नहीं — अधिक जानकारी के लिए अलग "क्रमिक छूट" पाठ देखें। जाँच: छूट के बाद SP, MP से कम होना चाहिए; लाभ के बाद SP, CP से अधिक होना चाहिए; एक ही CP पर लाभ% और हानि% को अलग-अलग CP वालों के साथ बिना रुपये में बदले तुलना न करें।

उदाहरण

- एक दुकानदार ₹1,200 में एक मेज़ खरीदता है और उसे ₹1,500 में बेचता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात करें। हल: लाभ = 1,500 − 1,200 = 300 लाभ% = (300 / 1,200) × 100 = 25% उत्तर: 25%
- एक व्यक्ति एक घड़ी ₹1,140 में 5% हानि पर बेचता है। क्रय मूल्य ज्ञात करें। हल: SP = CP × (1 − 5/100) = CP × 0.95 1,140 = CP × 0.95 CP = 1,140 / 0.95 = 1,200 उत्तर: ₹1,200

- ₹2,000 पर अंकित एक वस्तु को 15% की छूट के बाद बेचा जाता है। विक्रय मूल्य ज्ञात करें। हल: SP = MP × (1 − 15/100) = 2,000 × 0.85 = 1,700 उत्तर: ₹1,700
- एक व्यापारी अपने माल को क्रय मूल्य से 40% अधिक पर अंकित करता है, फिर अंकित मूल्य पर 10% की छूट देता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात करें। हल: मान लें CP = 100। अंकित मूल्य = 100 × 1.40 = 140 SP = 140 × (1 − 10/100) = 140 × 0.90 = 126 लाभ = 126 − 100 = 26, अतः लाभ% = 26% क्रमिक-परिवर्तन सूत्र से जांचें: a=+40, b=−10 → शुद्ध% = 40 − 10 + (40×−10)/100 = 30 − 4 = 26%। उत्तर: 26%
- एक बेईमान व्यापारी चावल को क्रय मूल्य पर बेचने का दावा करता है, लेकिन 1 किलो की जगह 800 ग्राम का बाट उपयोग करता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात करें। हल: वह 1,000 ग्राम के क्रय-मूल्य-दर से बिल बनाता है लेकिन वास्तव में केवल 800 ग्राम देता है, तो उसकी वास्तविक लागत केवल 800 ग्राम की है। मान लें प्रति ग्राम मूल्य उसकी लागत c के बराबर है। प्राप्त राशि = 1,000c (1 किलो का बिल)। वास्तविक लागत = 800c (जो वास्तव में दिया)। लाभ = 1,000c − 800c = 200c। वास्तविक लागत पर लाभ% = (200c / 800c) × 100 = 25% उत्तर: 25%
- एक व्यापारी किसी वस्तु को क्रय मूल्य से 25% अधिक पर अंकित करता है, लेकिन छूट देने के बाद भी केवल 12.5% लाभ कमाता है। छूट प्रतिशत ज्ञात करें। हल: मान लें CP = 100, तो MP = 125 और (12.5% लाभ होने से) SP = 112.5। छूट राशि = MP − SP = 125 − 112.5 = 12.5 छूट% = (12.5 / 125) × 100 = 10% उत्तर: 10%
- दो वस्तुएं प्रत्येक ₹1,200 में बेची जाती हैं। एक पर दुकानदार को 20% लाभ होता है, दूसरे पर 20% हानि। इस जोड़ी पर कुल लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात करें। हल: पहली वस्तु का CP = SP / 1.20 = 1,200 / 1.20 = 1,000। दूसरी वस्तु का CP = SP / 0.80 = 1,200 / 0.80 = 1,500। कुल CP = 1,000 + 1,500 = 2,500। कुल SP = 1,200 + 1,200 = 2,400। हानि = 2,500 − 2,400 = 100। हानि% = (100 / 2,500) × 100 = 4%। पहचान से जाँच: बराबर विक्रय मूल्य पर x% लाभ और x% हानि = 20% होने पर हानि हमेशा $(x/10)^2 = (20/10)^2$ = 4% होती है। मेल खाता है। उत्तर: 4% हानि (बराबरी नहीं, भले ही प्रतिशत बराबर और विपरीत दिखें)
- Practice: एक व्यक्ति ₹500 में एक वस्तु खरीदता है और उसे ₹575 में बेचता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात करें। (उत्तर: 15%। लाभ = 75; 75/500 × 100 = 15%।)
- Practice: एक साइकिल 12% हानि पर ₹2,640 में बेची जाती है। इसका क्रय मूल्य ज्ञात करें। (उत्तर: ₹3,000। CP × 0.88 = 2,640, अतः CP = 2,640/0.88।)
- Practice: ₹800 पर अंकित माल 25% की छूट पर बेचा जाता है। विक्रय मूल्य ज्ञात करें। (उत्तर: ₹600। SP = 800 × 0.75।)
- Practice: एक दुकानदार 1 किलो की जगह 900 ग्राम का बाट उपयोग करता है, लेकिन कीमत क्रय मूल्य के बराबर रखता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात करें। (उत्तर: 11.1% (1/9 × 100%)। लाभ% = (1,000 − 900)/900 × 100।)
- Practice: एक वस्तु को क्रय मूल्य से 40% अधिक अंकित करके 20% की छूट दी जाती है। शुद्ध लाभ प्रतिशत ज्ञात करें। (उत्तर: 12%। शुद्ध% = a + b + ab/100 = 40 − 20 + (40×−20)/100 = 20 − 8 = 12%।)
- Practice: दो वस्तुएं समान मूल्य पर बेची जाती हैं: एक पर 10% लाभ, दूसरे पर 10% हानि। जोड़ी पर कुल हानि प्रतिशत ज्ञात करें। (उत्तर: 1%। $(x/10)^2$ में x = 10 रखने पर $(10/10)^2$ = 1%।)
- Practice: एक व्यापारी माल को क्रय मूल्य से 20% अधिक अंकित करता है और छूट के बाद भी 4% लाभ कमाता है। छूट प्रतिशत ज्ञात करें। (उत्तर: 13⅓%। MP = 120, SP = 104 (CP 100 पर 4% लाभ); छूट = 120 पर 16, यानी 16/120 × 100।)

त्वरित दोहराव: लाभ = विक्रय मूल्य (SP) − क्रय मूल्य (CP), जब SP > CP हो। हानि = CP − SP, जब CP > SP हो।; लाभ% या हानि% हमेशा क्रय मूल्य (CP) पर निकाला जाता है, जब तक प्रश्न में स्पष्ट रूप से कुछ और न कहा गया हो: (लाभ या हानि / CP) × 100। व्यावसायिक "मार्जिन" SP के आधार पर निकाला जाता है — समान रुपये के लाभ के लिए ये दोनों प्रतिशत अलग होते हैं, इसलिए हमेशा जांचें कि प्रश्न किस आधार की बात कर रहा है।; छूट हमेशा अंकित मूल्य (MP) पर निकाली जाती है, क्रय मूल्य पर नहीं: SP = MP × (1 − छूट%/100)। इसे CP से गड्डमड्ड करना सबसे आम गलती है।; जब किसी वस्तु को a% बढ़ाकर अंकित किया जाता है और फिर b% की छूट दी जाती है, तो शुद्ध लाभ पर प्रभाव वही क्रमिक-परिवर्तन सूत्र होता है जो प्रतिशत में है: शुद्ध% = a + b + (ab/100)। इसका अर्थ यह भी है कि समान आकार का मार्कअप और छूट कभी रद्द नहीं होते — परिणाम हमेशा शुद्ध हानि होता है (नीचे उदाहरण देखें)।; झूठे बाट/माप वाले प्रश्न ("कीमत पर बेचने का दावा करता है लेकिन कम वज़न देता है") असल में छिपे हुए लाभ के प्रश्न हैं: व्यापारी का लाभ% = (अंतर / वास्तव में दी गई मात्रा) × 100, जहां अंतर = दावा की गई मात्रा − वास्तविक मात्रा।; एक उपयोगी पहचान: यदि दो वस्तुएं समान विक्रय मूल्य पर बेची जाती हैं, एक पर x% लाभ और दूसरे पर x% हानि, तो कुल परिणाम हमेशा (x/10)% का वर्ग, यानी (x^2/100)%, की हानि होता है — बराबरी कभी नहीं होती, भले ही +x% और −x% रद्द होते दिखें।; क्रमिक छूट (जैसे "20% छूट, फिर अतिरिक्त 10% छूट") भी क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन की तरह जुड़ती है, छूट प्रतिशतों को सीधे जोड़कर नहीं — अधिक जानकारी के लिए अलग "क्रमिक छूट" पाठ देखें।; जाँच: छूट के बाद SP, MP से कम होना चाहिए; लाभ के बाद SP, CP से अधिक होना चाहिए; एक ही CP पर लाभ% और हानि% को अलग-अलग CP वालों के साथ बिना रुपये में बदले तुलना न करें।

क्रमिक छूट (Successive Discount) के प्रश्न हल सहित

जब दो या अधिक छूट एक के बाद एक लगाई जाती हैं, तो वे सीधे जुड़ती नहीं हैं — हर छूट उस कीमत पर गणना की जाती है जो पहले ही पिछली छूट से घट चुकी होती है, तो क्रमिक छूट हमेशा ग्राहक के लिए उनके योग से कम मूल्यवान होती हैं। इस पेज में यह मुख्य विचार, तीन छूटों को दो-दो करके मिलाना, और उलटे प्रश्न (अंतिम कीमत देकर एक छूट निकालना) शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। हर छूट को एक-एक करके, क्रम में, जो भी कीमत पिछली छूट के बाद बची हो उस पर लागू करें — कभी भी प्रतिशतों को जोड़कर एक साथ लागू न करें। दो क्रमिक छूट d1% और d2% के बराबर एकल छूट होती है d1 + d2 − (d1 × d2)/100 — यह हमेशा साधारण योग d1 + d2 से थोड़ी कम होती है, क्योंकि दूसरी छूट पहले से घटी हुई कीमत पर लगती है। क्रमिक छूट लगभग हमेशा खरीदार को उनके योग के बराबर एकल छूट से ज़्यादा भुगतान करवाती है — "25% और 10% की छूट" "35% की सीधी छूट"

से छोटी बचत है, भले ही 25 + 10 = 35 हो। दो क्रमिक 50% छूट किसी वस्तु को मुफ्त नहीं बनातीं — दूसरी 50% पहले से आधी हो चुकी कीमत पर है, तो संयुक्त प्रभावी छूट 75% होती है, 100% नहीं। तीन क्रमिक छूटों के लिए, उन्हें दो-दो करके वही सूत्र दोहराकर मिलाएं: पहले d1 और d2 को एक समतुल्य छूट में मिलाएं, फिर उस परिणाम को d3 के साथ मिलाएं — यह एक साथ तीन प्रतिशतों को दिमाग में रखने से आसान है। उलटे प्रश्न (अंतिम कीमत, या समग्र समतुल्य छूट देकर, एक व्यक्तिगत छूट निकालना) गुणन को उल्टा चलाते हैं: अज्ञात छूट को अलग करने के लिए समग्र गुणक को ज्ञात छूट के गुणक से भाग दें।

उदाहरण

- ₹2000 MRP वाली एक वस्तु दो क्रमिक छूट, 20% और 10%, के बाद बेची जाती है। अंतिम विक्रय मूल्य ज्ञात करें। हल: पहली छूट के बाद: ₹2000 × (100 − 20)/100 = ₹1600। दूसरी छूट के बाद: ₹1600 × (100 − 10)/100 = ₹1440। उत्तर: ₹1440
- उसी वस्तु का उपयोग करते हुए (MRP ₹2000, क्रमिक छूट 20% और 10%), वह एकल छूट प्रतिशत ज्ञात करें जो वही अंतिम कीमत देगी। हल: समतुल्य एकल छूट = d1 + d2 − (d1 × d2)/100 = 20 + 10 − (20 × 10)/100 = 30 − 2 = 28%। जांच: ₹2000 × (100 − 28)/100 = ₹1440, जो क्रमिक छूट से मिली अंतिम कीमत से मेल खाता है। उत्तर: 28%
- ₹4000 MRP वाली एक वस्तु तीन क्रमिक छूट, 10%, 20% और 25%, के बाद बेची जाती है। अंतिम विक्रय मूल्य ज्ञात करें। हल: 10% के बाद: ₹4000 × 0.90 = ₹3600। 20% के बाद: ₹3600 × 0.80 = ₹2880। 25% के बाद: ₹2880 × 0.75 = ₹2160। उत्तर: ₹2160
- एक दुकानदार ₹4000 MRP वाली वस्तु पर एकल सीधी 30% छूट के बजाय दो क्रमिक छूट, 25% और 10%, देता है। ग्राहक के लिए कौन सा विकल्प सस्ता है, और कितना? हल: क्रमिक छूट: ₹4000 × 0.75 × 0.90 = ₹2700। एकल 30% छूट: ₹4000 × 0.70 = ₹2800। क्रमिक छूट कम कीमत देती है (₹2700 बनाम ₹2800) — ग्राहक के लिए ₹100 सस्ती। उत्तर: क्रमिक छूट, ₹100 से
- तीन क्रमिक छूट, 10%, 20% और 25%, के बराबर एकल छूट ज्ञात करें, दो-दो करके मिलाते हुए। हल: पहले 10% और 20% मिलाएं: 10 + 20 − (10×20)/100 = 30 − 2 = 28%। अब इस 28% को बचे 25% के साथ मिलाएं: 28 + 25 − (28×25)/100 = 53 − 7 = 46%। गुणकों से जांचें: 0.90 × 0.80 × 0.75 = 0.54, जो 46% छूट के बराबर है (1 − 0.54 = 0.46)। मेल खाता है। उत्तर: 46%
- ₹5,000 MRP वाली एक वस्तु दो क्रमिक छूट के बाद बेची जाती है, पहली 20%, और अंतिम कीमत ₹3,400 है। दूसरी छूट प्रतिशत ज्ञात करें। हल: पहली छूट के बाद: 5,000 × 0.80 = ₹4,000। दूसरी छूट d2 मानें: 4,000 × (1 − d2/100) = 3,400, तो (1 − d2/100) = 3,400/4,000 = 0.85। d2 = 15%। उत्तर: 15%
- किसी वस्तु पर दो क्रमिक छूट लगाई जाती हैं, पहली 10%। यदि समग्र समतुल्य एकल छूट 28% है, तो दूसरी छूट ज्ञात करें। हल: समग्र गुणक = 1 − 0.28 = 0.72। पहली छूट का गुणक = 1 − 0.10 = 0.90। दूसरी छूट का गुणक = 0.72 / 0.90 = 0.80, तो दूसरी छूट = 20%। उत्तर: 20%
- Practice: ₹1500 MRP वाली एक वस्तु दो क्रमिक छूट, 10% और 20%, के बाद बेची जाती है। अंतिम विक्रय मूल्य ज्ञात करें। (उत्तर: ₹1080)
- Practice: दो क्रमिक 15%-15% छूट के बराबर एकल छूट प्रतिशत ज्ञात करें। (उत्तर: 27.75%)
- Practice: ₹1000 MRP वाली एक वस्तु दो क्रमिक 50%-50% छूट के बाद बेची जाती है। अंतिम विक्रय मूल्य ज्ञात करें (यह मुफ्त नहीं है)। (उत्तर: ₹250)
- Practice: तीन क्रमिक छूट, 10%, 10% और 10%, के बराबर एकल छूट ज्ञात करें, दो-दो करके मिलाते हुए। (उत्तर: 27.1%। पहले दो मिलाएं: 19%; 19% को 10% के साथ मिलाएं: 19+10−1.9 = 27.1%। जांच: $0.9^3 = 0.729$।)
- Practice: ₹3,000 MRP वाली एक वस्तु दो क्रमिक छूट के बाद बेची जाती है, पहली 25%, और अंतिम कीमत ₹1,800 है। दूसरी छूट ज्ञात करें। (उत्तर: 20%। पहली छूट के बाद: ₹2,250; 2,250×(1−d2/100)=1,800 से d2=20।)
- Practice: किसी वस्तु पर दो क्रमिक छूट लगाई जाती हैं, पहली 20%। यदि समग्र समतुल्य छूट 28% है, तो दूसरी छूट ज्ञात करें। (उत्तर: 10%। समग्र गुणक 0.72 ÷ पहला गुणक 0.8 = 0.9।)
- Practice: ₹6,000 MRP वाली एक वस्तु क्रमिक छूट, 15% और 20%, के बाद बेची जाती है। अंतिम विक्रय मूल्य ज्ञात करें। (उत्तर: ₹4,080। 6,000 × 0.85 × 0.8।)

> **त्वरित दोहराव:** हर छूट को एक-एक करके, क्रम में, जो भी कीमत पिछली छूट के बाद बची हो उस पर लागू करें — कभी भी प्रतिशतों को जोड़कर एक साथ लागू न करें।; दो क्रमिक छूट d1% और d2% के बराबर एकल छूट होती है d1 + d2 − (d1 × d2)/100 — यह हमेशा साधारण योग d1 + d2 से थोड़ी कम होती है, क्योंकि दूसरी छूट पहले से घटी हुई कीमत पर लगती है।; क्रमिक छूट लगभग हमेशा खरीदार को उनके योग के बराबर एकल छूट से ज़्यादा भुगतान करवाती है — "25% और 10% की छूट" "35% की सीधी छूट" से छोटी बचत है, भले ही 25 + 10 = 35 हो।; दो क्रमिक 50% छूट किसी वस्तु को मुफ्त नहीं बनातीं — दूसरी 50% पहले से आधी हो चुकी कीमत पर है, तो संयुक्त प्रभावी छूट 75% होती है, 100% नहीं।; तीन क्रमिक छूटों के लिए, उन्हें दो-दो करके वही सूत्र दोहराकर मिलाएं: पहले d1 और d2 को एक समतुल्य छूट में मिलाएं, फिर उस परिणाम को d3 के साथ मिलाएं — यह एक साथ तीन प्रतिशतों को दिमाग में रखने से आसान है।; उलटे प्रश्न (अंतिम कीमत, या समग्र समतुल्य छूट देकर, एक व्यक्तिगत छूट निकालना) गुणन को उल्टा चलाते हैं: अज्ञात छूट को अलग करने के लिए समग्र गुणक को ज्ञात छूट के गुणक से भाग दें।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/profit-loss-discount/

सरलीकरण (BODMAS)

BODMAS, भिन्न, दशमलव, मूल और घातांक

BODMAS का अर्थ है पहले कोष्ठक, फिर घात और मूल, फिर बायें से दायें गुणा और भाग, और अंत में बायें से दायें जोड़ और घटाव का मूल्यांकन करना।

भिन्नों को जोड़ने या घटाने के लिए उभयनिष्ठ हर का उपयोग करें, गुणनफल के लिए अंशों और हरों को गुणा करें, किसी शून्येतर भाजक के व्युत्क्रम से गुणा करके भाग करें, और मिश्रित संख्या a + b/c को (ac + b)/c में बदलें।

दशमलवों के लिए, जोड़ते या घटाते समय दशमलव बिंदुओं को संरेखित करें, गुणा करते समय कुल दशमलव स्थान गिनें, और भाग करते समय दोनों संख्याओं को समान रूप से पैमाना करें; किसी आवर्ती दशमलव को दशमलव बिंदु को स्थानांतरित करके और समान आवर्ती पूँछों को निरस्त करने के लिए घटाकर भिन्न में बदला जा सकता है।

धनात्मक हरों वाली भिन्नों की तुलना उभयनिष्ठ हर या क्रॉस-गुणन से करें, अतः a/b < c/d ठीक तभी जब ad < bc।

वर्ग या घन का अर्थ है किसी संख्या को स्वयं से दो या तीन बार गुणा करना, मुख्य वर्गमूल हमेशा अऋणात्मक होता है, और वास्तविक घनमूल का चिह्न मूल संख्या के समान होता है।

धनात्मक आधार a और पूर्णांक घातांकों के लिए, a^m × a^n = a^(m+n), a^m ÷ a^n = a^(m−n), (a^m)^n = a^(mn), a^0 = 1, और a^(−n) = 1/a^n।

उदाहरण

- भिन्न और दशमलव के साथ BODMAS: 0.75 + (2/3 ÷ 4/9) × 0.2 = 3/4 + (2/3 × 9/4) × 1/5 = 3/4 + 3/10 = 21/20 = 1.05; अंतिम जोड़ से पहले भाग और गुणा पूरे किए जाते हैं।
- आवर्ती दशमलव और तुलना: यदि x = 0.1(6), जहाँ 6 हमेशा दोहराता है, तो 100x = 16.(6) और 10x = 1.(6); घटाने पर 90x = 15 मिलता है, अतः x = 1/6; 1/6 की 2/11 से तुलना करने के लिए, 1 × 11 = 11 की 2 × 6 = 12 से तुलना करें, जो 1/6 < 2/11 सिद्ध करता है।
- मूल और घातांक: $\sqrt{(144/225)} = 12/15 = 4/5$, $\sqrt[3]{(-216)} = -6$, और 2^3 × 2^(−5) = 2^(−2) = 1/4; 4/5 का वर्ग करके, −6 का घन करके, और 8 × 1/32 गुणा करके प्रत्येक परिणाम की जाँच होती है।

> **त्वरित दोहराव:** कोष्ठक → घात/मूल → × और ÷ बायें से दायें → + और − बायें से दायें; भिन्न भाग में व्युत्क्रम का उपयोग होता है; आवर्ती पूँछें घटाव से निरस्त होती हैं; ad और bc की तुलना करें; मुख्य $\sqrt{}$ अऋणात्मक है; गुणनफल/भागफल/घात-की-घात के लिए घातांक जोड़ें/घटाएँ/गुणा करें।

सरलीकरण (BODMAS) के प्रश्न हल सहित

सरलीकरण के प्रश्न कठिनाई से ज़्यादा गति की परख हैं — असली कौशल बस यही है कि पूरे व्यंजक को बाएं से दाएं हल करने के बजाय BODMAS क्रम को सही तरीके से लागू किया जाए। इस पेज में क्रियाओं का क्रम, वल्कुलम (बार) नियम, और भिन्न-दशमलव मिश्रित व्यंजक शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। BODMAS क्रियाओं का क्रम देता है: कोष्ठक (Brackets), का (Of), भाग (Division), गुणा (Multiplication), जोड़ (Addition), घटाव (Subtraction) — पहले सबसे भीतरी कोष्ठक हल करें, पूरे व्यंजक को बाएं से दाएं नहीं। "का" (of) का मतलब है गुणा, लेकिन इन परीक्षाओं की मानक शिक्षण परंपरा के अनुसार, व्यंजक के हर "का" को किसी भी अलग भाग या गुणा से पहले हल किया जाता है — यही वह चरण है जो लोगों को तब उलझाता है जब वे सीधे बाएं-से-दाएं हल करने लगते हैं। भाग और गुणा एक-दूसरे के बराबर दर्जे के हैं और जिस क्रम में आते हैं उसी क्रम में बाएं से दाएं हल किए जाते हैं — यह नहीं कि "हमेशा गुणा से पहले भाग करें"। जोड़ और घटाव के लिए भी यही सच है। कोष्ठकों को सबसे भीतरी से बाहर की ओर हल करें: पहले ( ), फिर { }, फिर [ ], हर परिणाम को अगली बाहरी परत में डालते हुए। वल्कुलम (किसी भाग के ऊपर खींची गई रेखा) की प्राथमिकता सबसे अधिक होती है — कोष्ठकों से भी अधिक। बार के नीचे के भाग को पहले, अपने स्वतंत्र BODMAS गणना के रूप में, हल करें, बाकी व्यंजक को छूने से पहले। जब किसी व्यंजक में भिन्न और दशमलव दोनों मिले हों, तो गणना से पहले सब कुछ एक ही रूप (आमतौर पर भिन्न, क्योंकि वे बिल्कुल सही जुड़ते हैं) में बदलें — 0.6 और 3/5 को बिना बदले मिलाना गणना में गलती का आम कारण है। जाँच के लिए, सबसे भीतरी हिस्से को अलग से फिर से हल करें और देखें कि वह उसी से मेल खाता है जो आपने वापस डाला था — यह "गलत क्रम" की अधिकतर गलतियों को बाकी व्यंजक में फैलने से पहले ही पकड़ लेता है।

उदाहरण

- सरल करें: 15 + 6 ÷ 3 × 2 − 4 हल: पहले भाग और गुणा, बाएं से दाएं: 6 ÷ 3 = 2, फिर 2 × 2 = 4। अब जोड़ और घटाव, बाएं से दाएं: 15 + 4 − 4 = 15। उत्तर: 15
- सरल करें: 5 का 8 ÷ 4 + 6 × 2 हल: पहले "का": 5 का 8 = 40। इसके बाद भाग और गुणा: 40 ÷ 4 = 10, और 6 × 2 = 12। आखिर में जोड़: 10 + 12 = 22। उत्तर: 22
- सरल करें: 100 − [20 + {10 − (6 − 2)}] हल: पहले सबसे भीतरी कोष्ठक: (6 − 2) = 4। अगली परत: {10 − 4} = 6। अगली परत: [20 + 6] = 26। अंत में: 100 − 26 = 74। उत्तर: 74
- सरल करें: (3/4) का 60 + 25% का 80 − 15 हल: पहले "का" वाले पद: (3/4) का 60 = 45, और 80 का 25% = 20। जोड़ और घटाव, बाएं से दाएं: 45 + 20 − 15 = 50। उत्तर: 50
- सरल करें: 2/5 का 100 − (3/4 का 20 − 5) हल: पहले भीतरी कोष्ठक: 3/4 का 20 = 15, तो कोष्ठक बनता है (15 − 5) = 10। अब कोष्ठक के बाहर का "का": 2/5 का 100 = 40। अंत में: 40 − 10 = 30। उत्तर: 30
- सरल करें: 30 − bar(10 ÷ 2 + 3) × 2, जहां bar(...) एक वल्कुलम है — इसके नीचे के भाग को एक इकाई मानकर, अपने ही BODMAS से, पहले हल किया जाता है। हल: वल्कुलम के भीतर, सामान्य BODMAS ही लागू होता है: 10 ÷ 2 = 5, फिर 5 + 3 = 8। तो bar(10 ÷ 2 + 3) = 8, एक संख्या के रूप में। बाकी व्यंजक अब है: 30 − 8 × 2। घटाव से पहले गुणा: 8 × 2 = 16, फिर 30 − 16 = 14। उत्तर: 14

- सरल करें: 1.2 × 5/6 + 1.8 हल: दशमलव को भिन्न में बदलें ताकि सब एक ही रूप में हो: 1.2 = 6/5। (6/5) × (5/6) = 1 (5 और 6 ठीक-ठीक कट जाते हैं — इसलिए पहले बदलने से गोलाई (rounding) की गलती नहीं होती)। 1 + 1.8 = 2.8। उत्तर: 2.8
- Practice: सरल करें: 20 − 4 × 3 + 6 ÷ 2 (उत्तर: 11। पहले गुणा/भाग: 4×3=12, 6÷2=3; फिर 20−12+3।)
- Practice: सरल करें: 2 का 15 ÷ 5 − 3 × 2 (उत्तर: 0। पहले "का": 2 का 15 = 30; फिर 30÷5=6 और 3×2=6; 6−6।)
- Practice: सरल करें: 50 − [15 + {20 − (8 + 4)}] (उत्तर: 27। सबसे भीतरी: 8+4=12; {20−12}=8; [15+8]=23; 50−23।)
- Practice: सरल करें: 36 ÷ 6 × 2 + 5 − 3 का 2 (उत्तर: 11। पहले "का": 3 का 2 = 6; फिर 36÷6=6, 6×2=12; 12+5−6।)
- Practice: सरल करें: 30 − bar(10 ÷ 2 + 3) × 2, जहां bar(…) वल्कुलम है। (उत्तर: 14। बार के भीतर: 10÷2+3 = 8; फिर 30 − 8×2 = 30−16।)
- Practice: सरल करें: 1.2 × 5/6 + 1.8 (उत्तर: 2.8। 1.2 = 6/5; (6/5)×(5/6) = 1; 1+1.8।)
- Practice: सरल करें: 2/5 का 100 − (3/4 का 20 − 5) (उत्तर: 30। कोष्ठक पहले: 3/4 का 20 = 15, तो (15−5)=10; फिर 2/5 का 100 = 40; 40−10।)

> **त्वरित दोहराव:** BODMAS क्रियाओं का क्रम देता है: कोष्ठक (Brackets), का (Of), भाग (Division), गुणा (Multiplication), जोड़ (Addition), घटाव (Subtraction) — पहले सबसे भीतरी कोष्ठक हल करें, पूरे व्यंजक को बाएं से दाएं नहीं।; "का" (of) का मतलब है गुणा, लेकिन इन परीक्षाओं की मानक शिक्षण परंपरा के अनुसार, व्यंजक के हर "का" को किसी भी अलग भाग या गुणा से पहले हल किया जाता है — यही वह चरण है जो लोगों को तब उलझाता है जब वे सीधे बाएं-से-दाएं हल करने लगते हैं।; भाग और गुणा एक-दूसरे के बराबर दर्जे के हैं और जिस क्रम में आते हैं उसी क्रम में बाएं से दाएं हल किए जाते हैं — यह नहीं कि "हमेशा गुणा से पहले भाग करें"। जोड़ और घटाव के लिए भी यही सच है।; कोष्ठकों को सबसे भीतरी से बाहर की ओर हल करें: पहले ( ), फिर {}, फिर [ ], हर परिणाम को अगली बाहरी परत में डालते हुए।; वल्कुलम (किसी भाग के ऊपर खींची गई रेखा) की प्राथमिकता सबसे अधिक होती है — कोष्ठकों से भी अधिक। बार के नीचे के भाग को पहले, अपने स्वतंत्र BODMAS गणना के रूप में, हल करें, बाकी व्यंजक को छूने से पहले।; जब किसी व्यंजक में भिन्न और दशमलव दोनों मिले हों, तो गणना से पहले सब कुछ एक ही रूप (आमतौर पर भिन्न, क्योंकि वे बिल्कुल सही जुड़ते हैं) में बदलें — 0.6 और 3/5 को बिना बदले मिलाना गणना में गलती का आम कारण है।; जाँच के लिए, सबसे भीतरी हिस्से को अलग से फिर से हल करें और देखें कि वह उसी से मेल खाता है जो आपने वापस डाला था — यह "गलत क्रम" की अधिकतर गलतियों को बाकी व्यंजक में फैलने से पहले ही पकड़ लेता है।

सन्निकटन (Approximation) के प्रश्न हल सहित

सन्निकटन (approximation) के प्रश्न सटीक उत्तर नहीं मांगते — वे दिए गए विकल्पों में सबसे नज़दीकी उत्तर मांगते हैं, इसलिए हर संख्या को पहले गोल (round) करना ही तकनीक है, कोई शॉर्टकट नहीं। इस पेज में मुख्य गोल-करने की विधि, वर्ग/घन/मूल, और गुणा बनाम जोड़ में गोल करने की त्रुटि कैसे अलग व्यवहार करती है, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ दिया गया है। अभिव्यक्ति (expression) की हर संख्या को पहले एक सुविधाजनक नज़दीकी मान तक गोल करें — दशमलव के लिए निकटतम पूर्णांक, प्रतिशत और बड़ी संख्याओं के लिए 10/100 का निकटतम गुणज, वर्गमूल के नीचे निकटतम पूर्ण वर्ग। फिर गोल की गई संख्याओं के साथ सामान्य रूप से BODMAS का उपयोग करके गणना करें — लक्ष्य सटीक उत्तर के करीब एक मान है, सटीक उत्तर खुद नहीं। लगातार (consistently) गोल करें: यदि आप एक संख्या को ऊपर गोल करते हैं, तो कुल त्रुटि आमतौर पर छोटी रहती है जब तक आप कई संख्याओं को एक ही दिशा में बड़े अंतर से गोल न करें। यह बहुविकल्पीय प्रश्नों के लिए एक शुद्ध गति तकनीक है, जहां विकल्प इतने अलग-अलग फैले होते हैं कि एक अनुमानित मान स्पष्ट रूप से सही उत्तर पहचान देता है। वर्ग, घन और मूल के लिए, उस निकटतम संख्या पर गोल करें जिसका वर्ग, घन या मूल हाथ से निकालना आसान हो — जैसे $28.9^2 \approx 29^2 = 841$, या 215.5 का घनमूल ≈ 216 (एक पूर्ण घन) का घनमूल = 6। कई गोल की गई संख्याओं के गुणा या भाग में, एक ही दिशा में एक से अधिक संख्या को गोल करना त्रुटि को बढ़ा देता है (दोनों त्रुटियां आपस में गुणा होती हैं); कुछ को ऊपर और कुछ को नीचे गोल करना त्रुटि को आंशिक रूप से रद्द कर देता है। कई पदों के योग या अंतर में, गोल करने की त्रुटियां सीधे जुड़ जाती हैं (या आंशिक रूप से रद्द होती हैं यदि कुछ पद ऊपर और कुछ नीचे गोल हों) — यह आमतौर पर गुणा से कम जोखिम वाला होता है, जहां त्रुटियां जुड़ने के बजाय गुणा होकर मिलती हैं।

उदाहरण

- 41.9% of 599.8 ≈ ? हल: गोल करें: 41.9% → 42%, और 599.8 → 600। 600 का 42% = (42/100) × 600 = 252। उत्तर: 252
- $\sqrt{255.8} \times 4.02 \approx ?$ हल: गोल करें: 255.8 → 256 (एक पूर्ण वर्ग), और 4.02 → 4। $\sqrt{256} = 16$, तो 16 × 4 = 64। उत्तर: 64
- 12.98 × 7.03 + 25.02 ≈ ? हल: गोल करें: 12.98 → 13, 7.03 → 7, और 25.02 → 25। 13 × 7 + 25 = 91 + 25 = 116। उत्तर: 116
- 3599 ÷ 59.8 ≈ ? हल: गोल करें: 3599 → 3600, और 59.8 → 60। 3600 ÷ 60 = 60। उत्तर: 60
- $28.9^2 \approx ?$ हल: 28.9 को निकटतम पूर्णांक तक गोल करें: 29। $29^2 = 841$। उत्तर: 841
- 215.5 का घनमूल ≈ ? हल: 215.5, 216 के बहुत करीब है, जो एक पूर्ण घन है ($6^3 = 216$)। तो 215.5 का घनमूल ≈ 216 का घनमूल = 6। उत्तर: 6
- 20.9 × 30.8 ≈ ? हल: गोल करें: 20.9 → 21, और 30.8 → 31। दोनों ऊपर गोल किए गए हैं, तो अनुमान सटीक मान से थोड़ा अधिक आएगा — अलग-अलग फैले विकल्पों वाले बहुविकल्पीय प्रश्न के लिए यह ठीक है। 21 × 31 = 651 (सटीक मान, 20.9 × 30.8, 643.72 आता है — सही विकल्प स्पष्ट रूप से पहचानने के लिए पर्याप्त नज़दीक)। उत्तर: ≈ 651
- Practice: 20.2% of 749.9 ≈ ? (उत्तर: 150)
- Practice: 15.92 × 4.08 ≈ ? (उत्तर: 64)
- Practice: 6399 ÷ 79.7 ≈ ? (उत्तर: 80)
- Practice: $19.1^2 \approx ?$ (उत्तर: 361। 19.1 को 19 तक गोल करें; 19^2।)
- Practice: 63.5 का घनमूल ≈ ? (उत्तर: 4। 63.5, $64 = 4^3$ के करीब है।)

- Practice: 11.2 × 8.9 ≈ ? (उत्तर: 99। गोल करें 11 × 9।)
- Practice: 49.8 + 30.2 − 19.9 ≈ ? (उत्तर: 60। गोल करें 50 + 30 − 20।)

> **त्वरित दोहराव:** अभिव्यक्ति (expression) की हर संख्या को पहले एक सुविधाजनक नज़दीकी मान तक गोल करें — दशमलव के लिए निकटतम पूर्णांक, प्रतिशत और बड़ी संख्याओं के लिए 10/100 का निकटतम गुणज, वर्गमूल के नीचे निकटतम पूर्ण वर्ग।; फिर गोल की गई संख्याओं के साथ सामान्य रूप से BODMAS का उपयोग करके गणना करें — लक्ष्य सटीक उत्तर के करीब एक मान है, सटीक उत्तर खुद नहीं।; लगातार (consistently) गोल करें: यदि आप एक संख्या को ऊपर गोल करते हैं, तो कुल त्रुटि आमतौर पर छोटी रहती है जब तक आप कई संख्याओं को एक ही दिशा में बड़े अंतर से गोल न करें।; यह बहुविकल्पीय प्रश्नों के लिए एक शुद्ध गति तकनीक है, जहां विकल्प इतने अलग-अलग फैले होते हैं कि एक अनुमानित मान स्पष्ट रूप से सही उत्तर पहचान देता है।; वर्ग, घन और मूल के लिए, उस निकटतम संख्या पर गोल करें जिसका वर्ग, घन या मूल हाथ से निकालना आसान हो — जैसे $28.9^2 \approx 29^2 = 841$, या 215.5 का घनमूल ≈ 216 (एक पूर्ण घन) का घनमूल = 6।; कई गोल की गई संख्याओं के गुणा या भाग में, एक ही दिशा में एक से अधिक संख्या को गोल करना त्रुटि को बढ़ा देता है (दोनों त्रुटियां आपस में गुणा होती हैं); कुछ को ऊपर और कुछ को नीचे गोल करना त्रुटि को आंशिक रूप से रद्द कर देता है।; कई पदों के योग या अंतर में, गोल करने की त्रुटियां सीधे जुड़ जाती हैं (या आंशिक रूप से रद्द होती हैं यदि कुछ पद ऊपर और कुछ नीचे गोल हों) — यह आमतौर पर गुणा से कम जोखिम वाला होता है, जहां त्रुटियां जुड़ने के बजाय गुणा होकर मिलती हैं।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/simplification-roots/

स्टॉक्स और शेयर्स (Stocks and Shares)

स्टॉक्स और शेयर्स (Stocks and Shares) के प्रश्न हल सहित

हर शेयर के लिए तीन मान मायने रखते हैं — अंकित मूल्य (Face Value, जो छपा हुआ मूल्य है, लाभांश हमेशा इसका एक प्रतिशत होता है), बाज़ार मूल्य (Market Value, जो आप वास्तव में चुकाते हैं), और लाभांश आय खुद — और ज़्यादातर प्रश्न बस इन तीनों को एक निवेश के ज़रिए जोड़ते हैं। इस पेज में यह संबंध, परीक्षाओं में आम "r% RsN स्टॉक M पर" वाली भाषा, और दो स्टॉक्स में से बेहतर कौन है, इसकी तुलना शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। अंकित मूल्य (FV) शेयर का छपा हुआ/नाममात्र मूल्य है (आमतौर पर ₹100 जब तक अन्यथा न कहा जाए) — लाभांश की गणना हमेशा FV के प्रतिशत के रूप में की जाती है, बाज़ार मूल्य के नहीं। बाज़ार मूल्य (MV) शेयर खरीदने के लिए वास्तव में चुकाई गई कीमत है। एक शेयर "₹X के प्रीमियम पर" का मतलब है MV = FV + X; "₹X की छूट पर" का मतलब है MV = FV − X। खरीदे गए शेयरों की संख्या = निवेश ÷ MV। वार्षिक आय = शेयरों की संख्या × प्रति शेयर लाभांश, जहां प्रति शेयर लाभांश = (लाभांश % × FV) / 100। प्रतिफल दर (yield) वास्तव में चुकाई गई राशि के प्रतिशत के रूप में लाभांश है: Yield% = (प्रति शेयर लाभांश / MV) × 100 — यही आपको अलग-अलग कीमतों पर खरीदे गए शेयरों में प्रतिफल की तुलना करने देता है। स्टॉक को अक्सर परीक्षा में अलग ढंग से लिखा जाता है: "r% RsN स्टॉक M पर" का मतलब है कुल अंकित मूल्य RsN की होल्डिंग, जो उस अंकित मूल्य पर r% लाभांश देती है, और वर्तमान में M बाज़ार मूल्य (प्रति Rs100 अंकित मूल्य) पर बिक रही है। इस होल्डिंग को खरीदने की लागत = N × M/100। वार्षिक आय = अंकित मूल्य N का r% — चुकाई गई लागत का नहीं। दो स्टॉक्स में से बेहतर निवेश तय करने के लिए, उनके प्रतिफल (yield) की तुलना करें (वास्तव में निवेशित हर रुपये पर मिलने वाला रिटर्न): Yield% = (लाभांश% × FV) / MV। अधिक प्रतिफल वाला बेहतर है, भले ही उसका घोषित लाभांश प्रतिशत कागज़ पर छोटा दिखे।

उदाहरण

- एक आदमी ₹100 का शेयर ₹120 में खरीदता है। यदि लाभांश 8% है, तो ₹2,400 के निवेश पर उसकी आय ज्ञात करें। हल: शेयरों की संख्या = 2,400 / 120 = 20। प्रति शेयर लाभांश = ₹100 का 8% = ₹8। आय = 20 × 8 = ₹160। उत्तर: ₹160
- 10% लाभांश देने वाला ₹100 का शेयर ₹25 के प्रीमियम पर खरीदा जाता है। निवेश पर प्रतिफल दर (yield) ज्ञात करें। हल: बाज़ार मूल्य = 100 + 25 = ₹125। प्रति शेयर लाभांश = ₹100 का 10% = ₹10। Yield = (10 / 125) × 100 = 8%। उत्तर: 8%
- एक आदमी ₹1,800 का निवेश ₹100 के शेयरों में 10% की छूट पर करता है, और 12% का लाभांश प्राप्त करता है। उसकी वार्षिक आय ज्ञात करें। हल: बाज़ार मूल्य = 100 − 10 = ₹90। शेयरों की संख्या = 1,800 / 90 = 20। प्रति शेयर लाभांश = ₹100 का 12% = ₹12। आय = 20 × 12 = ₹240। उत्तर: ₹240
- 10% लाभांश देने वाले ₹100 के शेयर का बाज़ार मूल्य ज्ञात करें, यदि निवेशक को प्रतिफल दर (yield) 8% है। हल: प्रति शेयर लाभांश = ₹100 का 10% = ₹10। Yield% = (लाभांश / MV) × 100, तो 8 = (10 / MV) × 100। MV = (10 / 8) × 100 = ₹125। उत्तर: ₹125
- ₹7,500, 8% स्टॉक की 96 पर लागत और इससे होने वाली वार्षिक आय ज्ञात करें। हल: लागत = अंकित मूल्य × (बाज़ार मूल्य / 100) = 7,500 × 96/100 = ₹7,200। वार्षिक आय = अंकित मूल्य का 8% = 7,500 का 8% = ₹600। उत्तर: लागत = ₹7,200, आय = ₹600
- कौन सा बेहतर निवेश है: 9% स्टॉक 120 पर, या 11% स्टॉक 143 पर? हल: पहले स्टॉक का प्रतिफल = (9/120) × 100 = 7.5%। दूसरे स्टॉक का प्रतिफल = (11/143) × 100 ≈ 7.69%। दूसरा स्टॉक थोड़ा अधिक प्रतिफल देता है, तो यह बेहतर निवेश है, भले ही इसका बाज़ार मूल्य अधिक हो। उत्तर: 11% स्टॉक 143 पर (प्रतिफल ≈ 7.69% बनाम 7.5%)
- एक आदमी ₹9,600 खर्च करके 10% स्टॉक 96 पर खरीदता है। उसके द्वारा खरीदे गए स्टॉक का अंकित मूल्य और उसकी वार्षिक आय ज्ञात करें। हल: अंकित मूल्य = लागत × 100 / बाज़ार मूल्य = 9,600 × 100/96 = ₹10,000। वार्षिक आय = अंकित मूल्य का 10% = 10,000 का 10% = ₹1,000। उत्तर: अंकित मूल्य = ₹10,000, आय = ₹1,000
- Practice: एक आदमी ₹100 का शेयर ₹150 में खरीदता है। यदि लाभांश 9% है, तो ₹3,000 के निवेश पर उसकी आय ज्ञात करें। (उत्तर: ₹180)
- Practice: 12% लाभांश देने वाला ₹100 का शेयर ₹20 के प्रीमियम पर खरीदा जाता है। प्रतिफल दर ज्ञात करें। (उत्तर: 10%)

- Practice: एक आदमी ₹1,600 का निवेश ₹100 के शेयरों में 20% की छूट पर करता है, और 15% का लाभांश प्राप्त करता है। उसकी वार्षिक आय ज्ञात करें। (उत्तर: ₹300)
- Practice: ₹5,000, 10% स्टॉक की 110 पर लागत और इससे होने वाली वार्षिक आय ज्ञात करें। (उत्तर: लागत = ₹5,500, आय = ₹500।)
- Practice: कौन सा बेहतर निवेश है: 6% स्टॉक 80 पर, या 9% स्टॉक 135 पर? (उत्तर: 6% स्टॉक 80 पर (प्रतिफल 7.5% बनाम ≈6.67%)।)
- Practice: एक आदमी ₹4,800 खर्च करके 12% स्टॉक 96 पर खरीदता है। खरीदे गए स्टॉक का अंकित मूल्य और वार्षिक आय ज्ञात करें। (उत्तर: अंकित मूल्य = ₹5,000, आय = ₹600।)
- Practice: 15% लाभांश देने वाला ₹100 का शेयर ₹50 के प्रीमियम पर खरीदा जाता है। प्रतिफल ज्ञात करें। (उत्तर: 10%। MV = 150; (15/150) × 100।)

त्वरित दोहराव: अंकित मूल्य (FV) शेयर का छपा हुआ/नाममात्र मूल्य है (आमतौर पर ₹100 जब तक अन्यथा न कहा जाए) — लाभांश की गणना हमेशा FV के प्रतिशत के रूप में की जाती है, बाज़ार मूल्य के नहीं; बाज़ार मूल्य (MV) शेयर खरीदने के लिए वास्तव में चुकाई गई कीमत है। एक शेयर "₹X के प्रीमियम पर" का मतलब है MV = FV + X; "₹X की छूट पर" का मतलब है MV = FV − X; खरीदे गए शेयरों की संख्या = निवेश ÷ MV। वार्षिक आय = शेयरों की संख्या × प्रति शेयर लाभांश, जहां प्रति शेयर लाभांश = (लाभांश % × FV) / 100; प्रतिफल दर (yield) वास्तव में चुकाई गई राशि के प्रतिशत के रूप में लाभांश है: Yield% = (प्रति शेयर लाभांश / MV) × 100 — यही आपको अलग-अलग कीमतों पर खरीदे गए शेयरों में प्रतिफल की तुलना करने देता है; स्टॉक को अक्सर परीक्षा में अलग ढंग से लिखा जाता है: "r% RsN स्टॉक M पर" का मतलब है कुल अंकित मूल्य RsN की होल्डिंग, जो उस अंकित मूल्य पर r% लाभांश देती है, और वर्तमान में M बाज़ार मूल्य (प्रति Rs100 अंकित मूल्य) पर बिक रही है। इस होल्डिंग को खरीदने की लागत = N × M/100। वार्षिक आय = अंकित मूल्य N का r% — चुकाई गई लागत का नहीं; दो स्टॉक्स में से बेहतर निवेश तय करने के लिए, उनके प्रतिफल (yield) की तुलना करें (वास्तव में निवेशित हर रुपये पर मिलने वाला रिटर्न): Yield% = (लाभांश% × FV) / MV। अधिक प्रतिफल वाला बेहतर है, भले ही उसका घोषित लाभांश प्रतिशत कागज़ पर छोटा दिखे।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/stocks-and-shares/

त्रिकोणमितीय अनुपात और सर्वसमिकाएं

त्रिकोणमिति — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग

एक समकोण त्रिभुज में, न्यून कोण θ के सापेक्ष, sinθ = लंब/कर्ण, cosθ = आधार/कर्ण और tanθ = लंब/आधार होता है। cosecθ, secθ और cotθ क्रमशः sinθ, cosθ और tanθ के व्युत्क्रम हैं। सर्वसमिकाएं $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ और $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ हर जगह सही हैं जहां अनुपात परिभाषित हैं। पूरक कोण $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ और $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$ को संतुष्ट करते हैं, संबंधित व्युत्क्रम संबंधों के साथ। 0°, 30°, 45°, 60° और 90° पर sine के मान 0, 1/2, $1/\sqrt{2}$, $\sqrt{3}/2$ और 1 हैं, और संबंधित cosine मान उल्टे क्रम में आते हैं। व्यंजकों को सरल करने से पहले कोण की बताई गई सीमा से चिह्न चुनें और अशून्य हर जांचें।

एक बार समकोण त्रिभुज की कोई भी दो भुजाएं ज्ञात हो जाएं, तो सभी छह अनुपात सीधे मिल सकते हैं - पहले कोण खुद ज्ञात करने की ज़रूरत नहीं। 3-4-5 त्रिभुज से (लंब 3, आधार 4, कर्ण 5), सभी छह अनुपात तुरंत मिलते हैं: sin=3/5, cos=4/5, tan=3/4, और उनके व्युत्क्रम cosec=5/3, sec=5/4, cot=4/3।

पूरक-कोण सर्वसमिकाएं तब उपयोगी शॉर्टकट हैं जब कोई प्रश्न θ और (90°−θ) को मिलाता है: उन्हें दो अलग अज्ञात कोणों के रूप में मानने के बजाय, पहचानें कि sin और cos बस भूमिका बदल लेते हैं (और tan/cot, sec/cosec भी) किसी कोण और उसके पूरक के बीच।

उदाहरण

- एक समकोण त्रिभुज में, न्यून कोण θ के सामने वाली भुजा 6 cm है और कर्ण 10 cm है। sinθ ज्ञात करें। हल: sine = लंब/कर्ण। तो sinθ = 6/10 = 3/5।
- $\sin^2(0°) + \cos^2(0°)$ का मान ज्ञात करें। हल: 0° पर, $\sin^2 = 0$ और $\cos^2 = 1$। रखने पर 0 + 1 = 1 मिलता है।
- एक न्यून θ के लिए, sinθ = 4/5 और cosθ = 3/5। sinθ/(1 + cosθ) का मान ज्ञात करें। हल: हर = 1 + 3/5 = 8/5। 4/5 को इससे भाग देने पर 0.5 मिलता है।
- एक 3-4-5 समकोण त्रिभुज में (θ के सापेक्ष लंब 3, आधार 4, कर्ण 5), secθ, cosecθ और cotθ ज्ञात करें। हल: secθ = कर्ण/आधार = 5/4, cosecθ = कर्ण/लंब = 5/3, cotθ = आधार/लंब = 4/3। जांच: $\sec^2\theta - \tan^2\theta = (5/4)^2 - (3/4)^2 = 25/16 - 9/16 = 1$, सर्वसमिका की पुष्टि करता है।
- यदि θ के लिए sinθ = 3/5 और cosθ = 4/5 है, तो θ ज्ञात किए बिना sin(90°−θ) और cos(90°−θ) ज्ञात करें। हल: पूरक सर्वसमिकाओं से, sin(90°−θ) = cosθ = 4/5, और cos(90°−θ) = sinθ = 3/5 - पूरक कोण के लिए दोनों अनुपात बस आपस में बदल जाते हैं।
- मानक मानों का उपयोग करके $\sec^2 30° - \tan^2 30° = 1$ सत्यापित करें। हल: sec30° = $2/\sqrt{3}$ और tan30° = $1/\sqrt{3}$। तो $\sec^2 30° - \tan^2 30° = 4/3 - 1/3 = 3/3 = 1$, मानक कोण पर सर्वसमिका की पुष्टि करता है।

त्वरित दोहराव: sinθ=लंब/कर्ण, cosθ=आधार/कर्ण, tanθ=लंब/आधार; cosec, sec, cot इनके व्युत्क्रम हैं। $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$; $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$; $\text{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$। पूरक कोण sin↔cos, tan↔cot, sec↔cosec बदलते हैं। समकोण त्रिभुज की कोई भी दो ज्ञात भुजाएं बिना कोण जाने सभी छह अनुपात देती हैं। मानक मान 0°,30°,45°,60°,90° पर: sin = 0, 1/2, $1/\sqrt{2}$, $\sqrt{3}/2$, 1 (cos उल्टे क्रम में)।

त्रिकोणमितीय अनुपात और सर्वसमिकाएं के प्रश्न हल सहित

Height and Distance के विपरीत, जो त्रिकोणमिति को वास्तविक दुनिया के त्रिभुजों पर लागू करता है, यह विषय सीधे अनुपातों और सर्वसमिकाओं के साथ काम करता है — एक अनुपात दिए जाने पर, दूसरा ज्ञात करें, या एक निश्चित सर्वसमिका का उपयोग करके एक अभिव्यक्ति को सरल करें। इस पेज में मूल और व्युत्पन्न सर्वसमिकाएं, व्युत्क्रम और पूरक-कोण संबंध, और 0°/90° पर किनारे के मान शामिल हैं, कई हल किए गए उदाहरणों के साथ। मूल सर्वसमिका: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, किसी भी कोण θ के लिए। $\sin\theta$ या $\cos\theta$ में से एक दिए जाने पर, यह सीधे दूसरा देता है। दो व्युत्पन्न सर्वसमिकाएं, दोनों मूल सर्वसमिका से बनी: $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, और $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$। मानक कोण मान जो याद रखने लायक हैं: $\sin 30° = \cos 60° = 1/2$; $\sin 60° = \cos 30° = \sqrt{3}/2$; $\sin 45° = \cos 45° = 1/\sqrt{2}$; $\tan 45° = 1$; $\tan 30° = 1/\sqrt{3}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$। एक न्यून कोण के लिए, सभी अनुपात धनात्मक होते हैं, तो एक सर्वसमिका में वर्गमूल लेने पर केवल कभी भी धनात्मक मूल की ज़रूरत होती है — यह व्यवहार में $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ के साथ काम करना सरल बनाता है। व्युत्क्रम संबंध: $\operatorname{cosec}\theta = 1/\sin\theta$, $\sec\theta = 1/\cos\theta$, $\cot\theta = 1/\tan\theta$ — हर बार त्रिभुज से दोबारा निकालने के बजाय इनसे किसी अनुपात और उसके व्युत्क्रम के बीच बदलें। पूरक-कोण संबंध: $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$, और $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$ — किसी कोण और उसके पूरक को मिलाने वाले अभिव्यक्तियों को सरल करने में उपयोगी। याद रखने लायक किनारे के मान: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$। $\tan 90°$ और $\cot 0°$ अपरिभाषित हैं (शून्य से भाग होता है), इसीलिए कुछ सर्वसमिकाएं केवल 0° और 90° के बीच के कोणों के लिए ही सही रहती हैं।

उदाहरण

- यदि $\sin\theta = 3/5$ और θ न्यून कोण है, तो $\cos\theta$ ज्ञात करें। हल: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ का उपयोग करते हुए: $\cos^2\theta = 1 - (3/5)^2 = 1 - 9/25 = 16/25$। $\cos\theta = \sqrt{(16/25)} = 4/5$ (धनात्मक, क्योंकि θ न्यून कोण है)। उत्तर: 4/5
- मान ज्ञात करें: $2\sin^2 45° + 3\cos^2 45°$ हल: $\sin 45° = \cos 45° = 1/\sqrt{2}$, तो $\sin^2 45° = \cos^2 45° = 1/2$। $2(1/2) + 3(1/2) = 1 + 1.5 = 2.5$। उत्तर: 2.5
- यदि $\tan\theta = 3/4$ और θ न्यून कोण है, तो $\sec\theta$ ज्ञात करें। हल: $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ का उपयोग करते हुए: $\sec^2\theta = 1 + (3/4)^2 = 1 + 9/16 = 25/16$। $\sec\theta = \sqrt{(25/16)} = 5/4$। उत्तर: 5/4
- मान ज्ञात करें: $(\sin 30° + \cos 60°) / (1 + \tan 45°)$ हल: $\sin 30° = 1/2$ और $\cos 60° = 1/2$, तो अंश $= 1/2 + 1/2 = 1$। $\tan 45° = 1$, तो हर $= 1 + 1 = 2$। परिणाम $= 1/2$। उत्तर: 1/2
- यदि $\cos\theta = 5/13$ और θ न्यून कोण है, तो $\sec\theta$ और $\operatorname{cosec}\theta$ ज्ञात करें। हल: $\cos\theta = 5/13$, एक 5-12-13 समकोण त्रिभुज से मेल खाता है, तो $\sin\theta = 12/13$। $\sec\theta = 1/\cos\theta = 13/5$। $\operatorname{cosec}\theta = 1/\sin\theta = 13/12$। उत्तर: $\sec\theta = 13/5$, $\operatorname{cosec}\theta = 13/12$
- मान ज्ञात करें: $\sin 35° / \cos 55°$ हल: पूरक-कोण संबंध से, $\cos 55° = \cos(90° - 35°) = \sin 35°$। तो अभिव्यक्ति बनती है $\sin 35° / \sin 35° = 1$। उत्तर: 1
- सरल करें: $(1 - \cos^2\theta)(1 + \cot^2\theta)$ हल: मूल सर्वसमिका से, $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$। व्युत्पन्न सर्वसमिका से, $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta = 1/\sin^2\theta$। गुणा करें: $\sin^2\theta \times (1/\sin^2\theta) = 1$। उत्तर: 1
- Practice: यदि $\sin\theta = 5/13$ और θ न्यून कोण है, तो $\cos\theta$ ज्ञात करें। (उत्तर: 12/13)
- Practice: यदि $\tan\theta = 5/12$ और θ न्यून कोण है, तो $\sec\theta$ ज्ञात करें। (उत्तर: 13/12)
- Practice: मान ज्ञात करें: $3\sin^2 60° + 2\cos^2 30°$ (उत्तर: 3.75)
- Practice: यदि $\sin\theta = 7/25$ और θ न्यून कोण है, तो $\operatorname{cosec}\theta$ और $\cos\theta$ ज्ञात करें। (उत्तर: $\operatorname{cosec}\theta = 25/7$, $\cos\theta = 24/25$ (एक 7-24-25 समकोण त्रिभुज)।)
- Practice: मान ज्ञात करें: $\tan 20° / \cot 70°$ (उत्तर: 1। $\cot 70° = \cot(90°-20°) = \tan 20°$।)
- Practice: सरल करें: $(1 + \tan^2\theta) \times \cos^2\theta$ (उत्तर: 1। $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta = 1/\cos^2\theta$, तो गुणनफल 1 है।)
- Practice: मान ज्ञात करें: $\sin 90° + \cos 0° - \sin 0°$ (उत्तर: 2। $1 + 1 - 0$।)

त्वरित दोहराव: मूल सर्वसमिका: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, किसी भी कोण θ के लिए। $\sin\theta$ या $\cos\theta$ में से एक दिए जाने पर, यह सीधे दूसरा देता है।; दो व्युत्पन्न सर्वसमिकाएं, दोनों मूल सर्वसमिका से बनी: $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, और $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$।; मानक कोण मान जो याद रखने लायक हैं: $\sin 30° = \cos 60° = 1/2$; $\sin 60° = \cos 30° = \sqrt{3}/2$; $\sin 45° = \cos 45° = 1/\sqrt{2}$; $\tan 45° = 1$; $\tan 30° = 1/\sqrt{3}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$।; एक न्यून कोण के लिए, सभी अनुपात धनात्मक होते हैं, तो एक सर्वसमिका में वर्गमूल लेने पर केवल कभी भी धनात्मक मूल की ज़रूरत होती है — यह व्यवहार में $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ के साथ काम करना सरल बनाता है।; व्युत्क्रम संबंध: $\operatorname{cosec}\theta = 1/\sin\theta$, $\sec\theta = 1/\cos\theta$, $\cot\theta = 1/\tan\theta$ — हर बार त्रिभुज से दोबारा निकालने के बजाय इनसे किसी अनुपात और उसके व्युत्क्रम के बीच बदलें।; पूरक-कोण संबंध: $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$, और $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$ — किसी कोण और उसके पूरक को मिलाने वाले अभिव्यक्तियों को सरल करने में उपयोगी।; याद रखने लायक किनारे के मान: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$। $\tan 90°$ और $\cot 0°$ अपरिभाषित हैं (शून्य से भाग होता है), इसीलिए कुछ सर्वसमिकाएं केवल 0° और 90° के बीच के कोणों के लिए ही सही रहती हैं।

मुफ़्त अभ्यास प्रश्न: parikshasaathi.com/hi/q/trigonometry/

दोहराव पत्रक

हर पाठ का त्वरित दोहराव एक जगह - परीक्षा से पहले की आख़िरी पढ़ाई के लिए।

औसत — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	औसत = योग/संख्या; भारित औसत = Σ(मान × भार)/Σभार; मिलाने, जोड़ने, हटाने या बदलने से पहले योग उपयोग करें। एक सदस्य बदलना: नया मान = पुराना मान ± (संख्या × औसत में बदलाव)। क्रमागत/समान-दूरी संख्याएं: औसत = (पहला+अंतिम)/2, जो विषम संख्या होने पर मध्य पद के बराबर है। समूह मिलाना: योग और संख्या जोड़ें, जब तक समूह बराबर आकार के न हों सीधे औसतों को औसत न करें।
औसत के प्रश्न हल सहित	औसत = सभी मानों का योग / मानों की संख्या।; इसे उल्टा करें तो: योग = औसत × मानों की संख्या — यह उल्टा सूत्र ज़्यादातर औसत के सवालों की कुंजी है, जो आमतौर पर औसत देकर योग के बारे में पूछते हैं (या इसके उलट)।; जब कोई नया मान समूह में जुड़ता है, तो पहले नया कुल योग निकालें (पुराना योग + नया मान), फिर नई संख्या से भाग दें — पुराने औसत को सीधे नए मान के साथ कभी औसत न करें।; उपयोगी शॉर्टकट: यदि n मौजूदा मानों में एक नया मान जोड़ने से औसत A से बदलकर A′ हो जाता है, तो नया मान = A′ + n(A′ − A) होता है।; क्रमागत संख्याओं (या किसी समान-अंतराल क्रम) के समूह के लिए, औसत मध्य मान के बराबर होता है (विषम संख्या में पद होने पर) या दो मध्य मानों का औसत (सम संख्या में पद होने पर) — यानी (पहला + अंतिम) / 2। यह हर पद जोड़ने से तेज़ है।; दो समूहों को मिलाना: संयुक्त औसत समूह के आकार के अनुसार भारित औसत होता है, (योग$_1$ + योग$_2$) / (संख्या$_1$ + संख्या$_2$) — दोनों समूह औसतों का सीधा औसत नहीं, जब तक दोनों समूह बराबर आकार के न हों।; तेज़ मानसिक गणना के लिए विचलन विधि: संख्याओं के पास कोई सुविधाजनक गोल आधार चुनें, हर संख्या का उस आधार से विचलन (धन या ऋण) निकालें, इन छोटे विचलनों का औसत लें, फिर उसे आधार में वापस जोड़ दें।; जाँच: किसी समूह का औसत उसके न्यूनतम और अधिकतम मान के बीच ही होना चाहिए। यदि निकाला गया औसत इस दायरे से बाहर है, तो कहीं गणना में गलती है।
डेटा इंटरप्रिटेशन — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	योग जोड़ते हैं, अंतर घटाते हैं, अनुपात बताए गए क्रम में तुलना करते हैं, प्रतिशत निर्दिष्ट आधार से भाग देते हैं। संयुक्त औसत = कुल मात्रा/कुल संख्या (आवृत्तियां अलग होने पर भारित)। पाई सेक्टर मान = (सेक्टर कोण/360°) × कुल। अनुपात: HCF से सरल करें। प्रतिशत बदलाव = (नया − पुराना)/पुराना × 100 - जब तक अन्यथा न कहा जाए, हमेशा पुराने मान से भाग दें।
डेटा इंटरप्रिटेशन के प्रश्न हल सहित	गणना करने से पहले हमेशा तालिका या चार्ट के साथ दी गई इकाइयों और किसी भी पैमाने की जांच करें ("आंकड़े हज़ारों में," "बिक्री ₹ लाख में") — पैमाना गलत पढ़ना इस विषय की सबसे आम लापरवाही वाली गलती है।; "कितना प्रतिशत ज़्यादा/कम" वाले प्रश्नों के लिए, प्रतिशत परिवर्तन हमेशा मूल मान (जिससे तुलना की जा रही है) के सापेक्ष निकालें, नए मान के सापेक्ष नहीं — प्रतिशत वाला वही तुलना-आधार नियम, बस एक तालिका के अंदर।; कई-चरणों वाले प्रश्नों के लिए, एक साथ कई मानों को दिमाग में मिलाने की कोशिश करने के बजाय, पहले हर ज़रूरी मान अलग-अलग निकालें और लिख लें।; तालिका के डेटा से निकाला गया अनुपात या औसत बिल्कुल अलग से अनुपात/औसत विषयों की तरह काम करता है — तालिका बस कच्चे आंकड़े देती है।; जब एक तालिका एक ही श्रेणियों के लिए दो जुड़ी हुई श्रृंखलाएं दिखाए (जैसे बिक्री और लागत, या आय और व्यय), तो "लाभ" या "अंतर" वाला प्रश्न हर पंक्ति में घटाव मांगता है — दोनों श्रृंखलाओं को सीधे औसत या किसी और तरीके से न मिलाएं।; यदि किसी तालिका में कुल योग दिया हो और एक प्रविष्टि खाली हो, तो ज्ञात प्रविष्टियों का योग दिए गए कुल से घटाकर गायब मान निकालें।; उत्तर देने के बाद, डेटा की वास्तविक दिशा से उसकी तार्किकता जांचें — यदि तालिका में हर वर्ष बिक्री बढ़ रही है, तो निकाला गया "कमी" वाला उत्तर आपको वापस जाकर एक चरण दोबारा जांचने के लिए सचेत करे।
पाई चार्ट (Pie Chart) के प्रश्न हल सहित	हर पाई चार्ट 360° (एक पूर्ण वृत्त) और 100% तक जुड़ता है — हर श्रेणी का हिस्सा पूरे का एक प्रतिशत है, या समान रूप से 360° का एक भिन्न है।; यदि किसी श्रेणी का प्रतिशत सीधे दिया गया है, तो उसका मान = (प्रतिशत/100) × कुल। यदि इसके बजाय उसका कोण (डिग्री में) दिया गया है, तो पहले बदलें: प्रतिशत = (कोण/360) × 100।; दो या अधिक श्रेणियों को मिलाने के लिए, पहले उनके प्रतिशत (या उनकी डिग्री) जोड़ें, फिर कुल को एक बार लागू करें — हर श्रेणी का मान अलग-अलग निकालकर उन्हें न जोड़ें, क्योंकि इससे गोलाई की त्रुटि आ सकती है।; एक ऐसी श्रेणी खोजने के लिए जो सीधे नहीं बताई गई है, दिए गए प्रतिशतों (या डिग्री) के योग को 100% (या 360°) से घटाएं।; एक ही पाई चार्ट के भीतर दो श्रेणियों की तुलना के लिए, रुपये में बदले बिना सीधे उनकी डिग्री या प्रतिशत को अनुपात के रूप में तुलना कर सकते हैं — जैसे यदि किराया 30% और भोजन 25% एक ही चार्ट का है, तो किराया : भोजन = 30 : 25 = 6 : 5, कुल जो भी हो।; दो अलग-अलग पाई चार्टों (जैसे दो अलग वर्षों) में एक ही श्रेणी की तुलना केवल प्रतिशत से करना भ्रामक हो सकता है यदि कुल अलग हों — एक बहुत बड़े कुल का छोटा प्रतिशत भी एक छोटे कुल के बड़े प्रतिशत से ज़्यादा वास्तविक राशि हो सकता है। चार्टों के बीच तुलना करने से पहले हमेशा दोनों को वास्तविक मानों में बदलें।

बार ग्राफ (Bar Graph) के प्रश्न हल सहित	हर बार की ऊंचाई (या क्षैतिज बार ग्राफ के लिए, लंबाई) उस श्रेणी के मान को अक्ष पर दिखाए गए पैमाने पर दर्शाती है — कुछ भी गणना करने से पहले इसे अक्ष के निशानों के विरुद्ध ध्यान से पढ़ें।; दो बार के बीच प्रतिशत परिवर्तन वही नियम उपयोग करता है जो किसी भी अन्य प्रतिशत प्रश्न में होता है: (नया − पुराना) / पुराना × 100, जिसमें पहले वाला बार मूल मान होता है।; "किस अवधि में सबसे अधिक/कम परिवर्तन हुआ" वाले प्रश्नों के लिए, पहले हर अवधि-से-अवधि परिवर्तन की गणना करें और उन्हें लिख लें, यह अंदाज़ा लगाने की कोशिश करने के बजाय कि कौन से बार सबसे अलग दिखते हैं।; कई बार में एक औसत बस उनका योग उनकी गिनती से भाग देने पर है — बार ग्राफ प्रारूप सूत्र नहीं बदलता, केवल यह बदलता है कि आप इनपुट मान कैसे पढ़ते हैं।; कुछ बार ग्राफ हर श्रेणी के लिए दो या अधिक बार दिखाते हैं (एक "समूहित" बार ग्राफ) — जैसे हर वर्ष में लड़कों और लड़कियों के लिए अलग बार। गणना के दौरान श्रृंखलाओं को अलग रखें; उन्हें केवल तभी जोड़ें या औसत करें जब प्रश्न स्पष्ट रूप से संयुक्त आंकड़ा मांगे।; ऐसे y-अक्ष से सावधान रहें जो शून्य से शुरू नहीं होता ("टूटा हुआ" या छोटा किया गया अक्ष) — बार दिखने में बहुत अलग लग सकते हैं भले ही उनके बीच वास्तविक प्रतिशत अंतर छोटा हो। हमेशा अक्ष पर दिए गए वास्तविक मानों से गणना करें, बार कितने ऊंचे दिखते हैं इससे नहीं।
लाइन ग्राफ (Line Graph) के प्रश्न हल सहित	रेखा पर हर बिंदु उस वर्ष (या अवधि) पर एक मान को अक्ष पर दिखाए गए पैमाने पर दर्शाता है — ढलान से अंदाज़ा लगाने के बजाय इसे अक्ष के निशानों के विरुद्ध पढ़ें।; दो बिंदुओं के बीच प्रतिशत परिवर्तन वही नियम उपयोग करता है जो किसी भी अन्य प्रतिशत प्रश्न में होता है: (नया − पुराना) / पुराना × 100, जिसमें पहले वाला बिंदु मूल मान होता है।; एक तेज़ी से ऊपर जाने वाला खंड एक बड़ी वृद्धि दर्शाता है और एक तेज़ी से नीचे जाने वाला खंड एक बड़ी कमी — लेकिन "तेज़ी" केवल एक मोटा संकेत है; "किस अवधि में सबसे बड़ा परिवर्तन हुआ" वाले प्रश्नों के लिए, ढलान का अंदाज़ा लगाने के बजाय पहले हर खंड के परिवर्तन की गणना करें।; कई बिंदुओं में एक औसत बस उनका योग उनकी गिनती से भाग देने पर है, बिल्कुल एक बार ग्राफ या तालिका की तरह — प्रारूप सूत्र नहीं बदलता, केवल यह बदलता है कि आप इनपुट मान कैसे पढ़ते हैं।; कुछ लाइन ग्राफ एक ही अक्षों पर दो या अधिक रेखाएं दिखाते हैं (जैसे समान वर्षों में दो अलग कंपनियों की बिक्री) — हर रेखा को साझा पैमाने के विरुद्ध अलग-अलग पढ़ें। "A ने B को कब पीछे छोड़ा" वाला प्रश्न बस वह पहला प्लॉट किया बिंदु ढूंढना है जहां A का मान B से अधिक हो जाता है।; किसी रुझान को प्लॉट किए बिंदुओं से आगे न बढ़ाएं। एक लाइन ग्राफ केवल दिखाए गए वर्षों में क्या हुआ बताता है — ढलान को एक न दिखाए गए वर्ष में आगे बढ़ाना यह मान लेता है कि पैटर्न ठीक वैसा ही जारी रहेगा, जिसकी पुष्टि चार्ट खुद नहीं करता।
संख्या पद्धति: विभाज्यता, गुणनखंड, घात और शेषफल	N = dq + r; गुणनखंड संख्या = ∏(घातांक + 1); वर्ग/घन घातांक 2/3 के गुणज हैं; क्रमगुणित अभाज्य घातांक = Σ floor(n/p^j); विषम योग = n^2; सम योग = n(n + 1); समावेशी सूचकांक गिनती = अंतिम − प्रथम + 1।
नंबर सिस्टम के प्रश्न हल सहित	विभाज्यता नियम आपको बिना भाग किए यह जांचने देते हैं कि कोई संख्या किसी छोटी संख्या से विभाज्य है या नहीं: 2 से यदि अंतिम अंक सम हो; 3 से यदि अंकों का योग 3 से विभाज्य हो; 4 से यदि अंतिम दो अंक 4 से विभाज्य संख्या बनाएं; 5 से यदि अंतिम अंक 0 या 5 हो; 9 से यदि अंकों का योग 9 से विभाज्य हो; 11 से यदि विषम और सम स्थितियों (दाईं ओर से गिनते हुए) के अंकों के योग का अंतर 11 से विभाज्य हो।; जब किसी संख्या N को भाजक D से भाग दिया जाता है, तो N = D × Q + R, जहां Q भागफल है और R शेषफल है, 0 ≤ R < D के साथ। यह संबंध हर शेषफल वाले प्रश्न की नींव है।; शेषफल जोड़ और गुणा के तहत पूर्वानुमानित व्यवहार करते हैं: आप पूरे व्यंजक को निकालने के बजाय पहले हर हिस्से का शेषफल ले सकते हैं — यह "किसी बड़ी घात का शेषफल ज्ञात करें" वाले प्रश्नों के लिए उपयोगी है, जहां क्रमिक घातों के शेषफल आमतौर पर एक छोटे चक्र में दोहराते हैं।; कोई संख्या पूर्ण वर्ग है यदि उसके अभाज्य गुणनखंडन में हर घात सम हो; यह पूर्ण घन है यदि हर घात 3 का गुणज हो।; उपयोगी योग सूत्र: पहली n प्राकृत संख्याओं का योग = n(n+1)/2; पहले n वर्गों का योग = n(n+1)(2n+1)/6; पहले n घनों का योग = $[n(n+1)/2]^2$।; a^n का इकाई अंक ज्ञात करने के लिए, a की घातों के इकाई अंकों का (छोटा) चक्र ढूंढें, फिर सही स्थिति चुनने के लिए n mod (चक्र की लंबाई) का उपयोग करें — यदि यह शेषफल 0 आता है, तो यह चक्र की अंतिम प्रविष्टि की ओर इशारा करता है, ज़रूरी नहीं कि a के अपने इकाई अंक की ओर।; n! में अंतिम शून्यों की संख्या = 1 से n तक की संख्याओं में 5 कितनी बार विभाजित होता है (5 के गुणज गिनें, फिर 25 के, फिर 125 के, ... और जोड़ें)। केवल 5 गिनें, 2 नहीं — किसी फैक्टोरियल में हमेशा 2 के गुणनखंड 5 से ज़्यादा होते हैं, तो 5 ही सीमित करने वाला कारक है।; N के अभाज्य गुणनखंडन $N = p_1^a \times p_2^b \times \ldots$ से, N के गुणनखंडों की संख्या = (a+1) × (b+1) × ... होती है — हर घात अपनी पसंद की संख्या (0 से उस घात तक) देती है, जिन्हें गुणा किया जाता है।
प्रतिशत की मूल बातें	N का x% = (x×N)/100।
प्रतिशत रूपांतरण, परिवर्तन और अनुप्रयोग	p% = p/100; हिस्सा = भाग/संपूर्ण × 100; परिवर्तन% = (नया − पुराना)/पुराना × 100; नया = पुराना × (1 ± p/100); मूल = नया ÷ गुणक; क्रमिक गुणक गुणा होते हैं; बचत = आय − व्यय।
प्रतिशत के प्रश्न हल सहित	"प्रतिशत" का अर्थ है "प्रति सौ" — किसी संख्या N का x% = (x/100) × N होता है।; प्रतिशत परिवर्तन (वृद्धि या कमी) हमेशा मूल मान पर आधारित होकर निकाला जाता है: (परिवर्तन / मूल मान) × 100।; दो क्रमिक प्रतिशत परिवर्तनों a% और b% के लिए (कमी के लिए कोई भी ऋणात्मक हो सकता है), शुद्ध परिवर्तन होता है a + b + (ab/100) — सीधे a + b नहीं। प्रतिशत के प्रश्नों में यह सबसे आम गलती है।; पहले आधार पहचानें: “A, B से 20% अधिक है” में B को 100% मानते हैं। उलटी तुलना में आधार बदलता है, इसलिए प्रतिशत भी बदलता है।; r% वृद्धि का गुणक 1 + r/100 और कमी का गुणक 1 − r/100 है। मूल मान पाने के लिए अंतिम मान को गुणक से भाग दें; अंतिम मान में से वही प्रतिशत न घटाएँ।; दर 40% से 50% होने पर अंतर 10 प्रतिशत-अंक है। सापेक्ष वृद्धि (50 − 40)/40 × 100 = 25% है। दोनों को अलग रखें।; संयुक्त प्रतिशत में पहले वास्तविक संख्याएँ जोड़ें, फिर कुल आधार से भाग दें। प्रतिशतों का साधारण औसत तभी सही है जब आधार समान हों।; जाँच: समान प्रतिशत की वृद्धि और कमी के बाद हानि होती है। छूट के बाद मूल्य मूल से कम होना चाहिए। प्रश्न के आधार के अनुसार परिणाम की तार्किकता देखें।

अनुपात, समानुपात, बँटवारा और आयु	अनुपात a:b बताए गए क्रम में तुलना करता है; निम्नतम रूप में सरल करें। a:b=c:d का अर्थ ad=bc है। कुल T को अनुपात a:b में बांटना हिस्से Ta/(a+b) और Tb/(a+b) देता है। एक अंतर अनुपात भागों के अंतर से मिलता है, पूरे पदों से नहीं। a:b और c:d का मिश्रित अनुपात = ac:bd। a,b के बीच मध्य समानुपाती x: x^2=ab। व्युत्क्रम बँटवारा 1/a:1/b = b:a उपयोग करता है। आयु: kx के रूप में व्यक्त करें, भूत/भविष्य अनुपातों के लिए हर आयु में समान बीता समय बदलें।
अनुपात और समानुपात के प्रश्न हल सहित	अनुपात a : b एक ही प्रकार की दो राशियों की तुलना करता है और इसकी कोई इकाई नहीं होती। दोनों पदों को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा या भाग करने पर समतुल्य अनुपात मिलता है।; अनुपात के पद वास्तविक मात्राएं नहीं होते जब तक कोई कुल या एक वास्तविक मान न दिया गया हो — a : b = 3 : 5 का अर्थ है दो मात्राएं किसी गुणक x के लिए 3x और 5x हैं, जिसे प्रश्न के बाकी भाग से निकालना होता है।; समानुपात दो बराबर अनुपात होते हैं: a : b = c : d, जिसका मतलब है a × d = b × c ("चरम पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल") — अधिकतर समानुपात के प्रश्न इसी क्रॉस-गुणन से हल होते हैं।; किसी कुल राशि T को अनुपात a : b : c में बांटने के लिए, हर हिस्सा = (उस पद ÷ पदों का योग) × T होता है।; एक साझा पद वाले दो अनुपातों a : b और b : c को एक तीन-पद वाले अनुपात a : b : c में मिलाने के लिए, हर अनुपात को इस तरह बड़ा करें कि साझा पद (b) दोनों में बराबर हो जाए — आमतौर पर उनका LCM निकालकर।; दो राशियां प्रत्यक्ष समानुपात में होती हैं यदि उनका अनुपात स्थिर रहे (a/b = k); वे व्युत्क्रम समानुपात में होती हैं यदि उनका गुणनफल स्थिर रहे (a × b = k)। इन्हें गड्डमड्ड करना आम गलती है — स्थिर दूरी के लिए चाल और समय प्रत्यक्ष नहीं, व्युत्क्रम समानुपात में होते हैं, क्योंकि अधिक चाल का अर्थ कम समय है, अधिक नहीं।; दो अनुपातों a : b और c : d की तुलना के लिए क्रॉस-गुणन करें: a × d की तुलना b × c से करें। यदि a × d > b × c, तो a : b > c : d।; सतत समानुपात a : b = b : c में, मध्य पद b, a और c के बीच का मध्यानुपाती (mean proportional) होता है, और b = √(a × c)।
मध्यानुपाती, तृतीयानुपाती और चतुर्थानुपाती के प्रश्न हल सहित	a, b, c का चतुर्थानुपाती: x ज्ञात करें जहां a : b = c : x। क्रॉस-गुणा करने पर x = (b × c) / a मिलता है।; a, b का तृतीयानुपाती: x ज्ञात करें जहां a : b = b : x — ध्यान दें b दोहराया गया है। क्रॉस-गुणा करने पर x = b^2 / a मिलता है।; a और b के बीच मध्यानुपाती: x ज्ञात करें जहां a : x = x : b — इस बार x दोहराया गया है। क्रॉस-गुणा करने पर x^2 = a × b मिलता है, तो x = √(ab)।; इन तीनों को मिलाना आसान है क्योंकि इन सभी में तीन दी गई-या-निहित संख्याएं शामिल होती हैं — क्रॉस-गुणा करने से पहले अनुपात कथन को स्पष्ट रूप से लिखें, अज्ञात को उसके सही स्थान पर रखते हुए।; तीनों एक गुणोत्तर श्रेणी (GP) (लगातार पदों के बीच स्थिर अनुपात वाला क्रम) का वर्णन करते हैं: तृतीयानुपाती a, b, x को एक GP बनाता है; मध्यानुपाती a, x, b को एक GP बनाता है। यह पहचानना एक तेज़ जाँच देता है — लगातार पदों को भाग दें और देखें अनुपात हर बार वही है।; उलटे प्रश्न आपको स्वयं अनुपाती मान देते हैं और तीन मूल संख्याओं में से एक पूछते हैं — वही क्रॉस-गुणा किया समीकरण पुनर्व्यवस्थित करें ताकि अब जो चर अज्ञात है वह अलग हो जाए, सामान्य वाले के बजाय।; अपने उत्तर को वापस मूल अनुपात में एक वास्तविक अनुपात के रूप में रखकर जांचें (जैसे 3:5, सरल करने पर 12:20 के बराबर होना चाहिए) ताकि पुष्टि हो कि दोनों पक्ष वास्तव में मेल खाते हैं।
साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	SI = Prt/100; CI राशि = P(1 + r/100)^t वार्षिक अवधि के लिए; अर्धवार्षिक में r/2 और 2t उपयोग करें; बदलती दरें अपने अवधि गुणकों को गुणा करती हैं (कभी औसत नहीं)। ठीक 2 वर्षों के लिए: CI−SI = P×(r/100)²। SI से दर या समय ज्ञात करना: दर=(SI×100)/(Pt) या समय=(SI×100)/(Pr) पुनर्व्यवस्थित करें।
साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज के प्रश्न हल सहित	साधारण ब्याज (SI) = (P × R × T) / 100, जहां P मूलधन है, R वार्षिक दर है, T वर्षों में समय है। मिश्रधन = P + SI।; चक्रवृद्धि ब्याज (CI), वार्षिक रूप से संयोजित: मिश्रधन = P × (1 + R/100)^T। CI = मिश्रधन − P।; समान P, R और T (जब T > 1 हो) के लिए, CI हमेशा SI से अधिक होता है — बाद के वर्षों में ब्याज पर भी ब्याज मिलता है। जब T = 1 वर्ष हो, CI और SI बराबर होते हैं, क्योंकि अभी कोई संयोजन हुआ ही नहीं।; 2 वर्षों के लिए शॉर्टकट: CI − SI = P × $(R/100)^2$। 3 वर्षों के लिए: CI − SI = P × $(R/100)^2$ × (3 + R/100)। दोनों (1 + R/100)^T के विस्तार से निकलते हैं और केवल बताए गए वर्षों के लिए ही सही हैं।; 2 वर्षों में चक्रवृद्धि, उसी प्रतिशत वृद्धि को दो बार लगाने जैसा है (प्रतिशत वाला पाठ देखें): 2 वर्षों में शुद्ध प्रतिशत वृद्धि 2R + R^2/100 होती है, इसलिए 2 वर्षों का CI हमेशा (एक वर्ष के SI का दोगुना) से अधिक होता है।; यदि दर हर साल बदलती है (जैसे पहले वर्ष 10%, दूसरे वर्ष 20%), तो एक सूत्र का उपयोग न करें — हर वर्ष के गुणक को गुणा करें: मिश्रधन = P × (1 + R_1/100) × (1 + R_2/100) × ; एक आम गलती है CI के आंकड़ों को SI के सूत्र में (या इसके विपरीत) डाल देना, क्योंकि प्रश्न केवल "ब्याज" कहता है — हमेशा "साधारण" या "चक्रवृद्धि" शब्द देखकर ही सूत्र चुनें।; वर्ष के भिन्नात्मक भाग (जैसे 2 वर्ष 6 माह) के लिए, वार्षिक संयोजन में मानक परंपरा यह है: पूरे वर्षों के लिए CI निकालें, फिर बचे हुए भाग के लिए पूरे वर्षों के बाद मिली राशि पर साधारण ब्याज जोड़ें — भिन्नात्मक भाग पर चक्रवृद्धि नहीं, जब तक प्रश्न में कुछ और न कहा गया हो।
चक्रवृद्धि ब्याज: अर्धवार्षिक और त्रैमासिक चक्रवृद्धि के प्रश्न हल सहित	अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि के लिए: Amount = P × (1 + दर/100)^अवधियां लागू करने से पहले वार्षिक दर को 2 से भाग दें, और समय (वर्षों में) को 2 से गुणा करें।; त्रैमासिक चक्रवृद्धि के लिए: वार्षिक दर को 4 से भाग दें, और समय (वर्षों में) को 4 से गुणा करें।; मूल सूत्र कभी नहीं बदलता — केवल यह बदलता है कि "प्रति अवधि दर" और "अवधियों की संख्या" क्या मानी जाए। पहले इन दो संख्याओं को सही करें, फिर यह वार्षिक चक्रवृद्धि जैसी ही गणना है।; चक्रवृद्धि ब्याज = राशि − मूलधन, बिल्कुल वार्षिक चक्रवृद्धि की तरह — दर/समय समायोजन पर ध्यान केंद्रित करने के बाद यह अंतिम चरण भूलना आसान है।; समान मूलधन, वार्षिक दर और समय के लिए, अधिक बार चक्रवृद्धि होने से हमेशा थोड़ा अधिक ब्याज मिलता है: त्रैमासिक, अर्धवार्षिक से अधिक देता है, जो वार्षिक से अधिक देता है — क्योंकि छोटी अवधियों में ब्याज खुद पर पहले ब्याज कमाना शुरू कर देता है।; उलटे प्रश्न (अंतिम राशि देकर मूलधन या दर निकालना) बिल्कुल वार्षिक चक्रवृद्धि की तरह काम करते हैं, बस पहले से समायोजित प्रति-अवधि दर और अवधियों की संख्या के साथ: मूलधन = राशि / (1 + दर/100)^अवधियां, या दर पाने के लिए राशि के गुणक की मानक घातों से तुलना करें।
समय और कार्य — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	काम = दर × समय; संयुक्त दरें जुड़ती हैं, खाली करने वाली दरें घटती हैं; हर कार्य-अंतराल को अलग से हिसाब में लें; मज़दूरी बताए जाने पर पूर्ण हुए काम के अनुसार बंटती है। कर्मचारी-संख्या प्रश्नों के लिए: M1×D1 = M2×D2 (पुरुष-दिन स्थिरांक)। समान अवधि साथ काम करने पर मज़दूरी हिस्सा व्यक्तिगत दरों के ठीक अनुपात में बंटता है।

समय और कार्य के प्रश्न हल सहित	यदि कोई व्यक्ति किसी कार्य को n दिनों में पूरा करता है, तो उसकी कार्य-दर प्रतिदिन कार्य का 1/n होती है। हर किसी को इस तरह दर में बदलना लगभग हर सवाल की कुंजी है।; जब लोग साथ काम करते हैं, तो उनकी व्यक्तिगत दैनिक दरों को जोड़ें ताकि मिली-जुली दर मिले। साथ में कार्य पूरा करने का समय = 1 ÷ (मिली-जुली दर)।; दो व्यक्तियों के लिए शॉर्टकट, A, x दिनों में और B, y दिनों में, शुरुआत से साथ काम करते हुए: मिला हुआ समय = xy / (x + y)। (यह बस दर-जोड़ के नियम को बीजगणितीय रूप से निकाला गया रूप है — सीधे याद रखने लायक।); "X% अधिक कुशल" का मतलब है प्रतिदिन X% अधिक कार्य, यानी दर को (1 + X/100) से गुणा किया जाता है — और चूंकि दर और समय एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं, समय को उसी गुणक से गुणा नहीं, भाग किया जाता है।; समान कुल कार्य के लिए, पुरुष और दिन आपस में बदलते हैं: पुरुष$_1$ × दिन$_1$ = पुरुष$_2$ × दिन$_2$ (यदि प्रतिदिन काम के घंटे भी बदलें तो दोनों तरफ × घंटे जोड़ें)। अलग कार्य W के लिए, सामान्य रूप है (पुरुष × दिन × घंटे) / W = स्थिरांक।; जब दो व्यक्ति एकांतर दिनों पर काम करते हैं, तो पहले एक पूरे चक्र (जैसे एक-एक दिन दोनों) में हुआ कार्य निकालें, देखें कि कार्य पूरा होने से पहले कितने पूरे चक्र समाते हैं, फिर बचे हुए दिन अलग से हल करें — यह न मानें कि एकांतर हमेशा बराबर बंट जाएगा, जब तक ऐसा वास्तव में न हो।; जब कोई व्यक्ति बीच में काम छोड़ दे (या बीच में जुड़े), तो प्रश्न को चरणों में बांटें: जिस चरण में सभी मौजूद लोग साथ काम कर रहे थे उसमें हुआ कार्य निकालें, इसे 1 से घटाएं, फिर बचे चरण को बचे हुए व्यक्ति के साथ हल करें।; जाँच: बहु-चरण प्रश्न हल करने के बाद, हर चरण का योगदान जोड़ें — यह ठीक 1 (एक पूरा कार्य) के बराबर होना चाहिए। यदि नहीं, तो किसी चरण की गणना गलत है।
पाइप्स और सिस्टर्न्स के प्रश्न हल सहित	जो पाइप टंकी भरता है उसकी दर धनात्मक होती है (प्रति घंटा भरे गए टंकी का हिस्सा); जो पाइप खाली करता है (आउटलेट) उसकी दर ऋणात्मक होती है। दरों को बिल्कुल समय और कार्य की तरह जोड़ें, बस आउटलेट पाइप घटते हैं।; यदि एक भरने वाला पाइप किसी टंकी को x घंटों में भर सकता है, तो उसकी दर 1/x है। यदि एक आउटलेट एक भरी हुई टंकी को y घंटों में खाली कर सकता है, तो उसकी दर −1/y है।; एक साथ खुले कई पाइपों के लिए, शुद्ध दर पाने के लिए सभी दरों को जोड़ें (भरने वाले धनात्मक, खाली करने वाले ऋणात्मक)। भरने (या खाली करने) का समय = 1 ÷ |शुद्ध दर|, और चिह्न बताता है कि टंकी असल में किस दिशा में जा रही है।; जो पाइप किसी दूसरे से "दोगुना तेज़" है उसका समय आधा होता है — यहां दर और समय एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं, ठीक समय और कार्य की तरह।; उलटे प्रश्न (मिला हुआ समय देकर एक पाइप का अपना समय निकालना) सामान्य सेटअप को ही उलटा करते हैं: अज्ञात दर के लिए 1/x ± 1/y = 1/(मिला हुआ समय) को पुनर्व्यवस्थित करें, फिर उस पाइप का अपना समय पाने के लिए उसका व्युत्क्रम लें।; यदि एक पाइप दूसरे के जुड़ने से पहले शुरू हो जाए, या कोई पाइप बीच में बंद हो जाए, तो प्रश्न को समय और कार्य की तरह चरणों में बांटें: हर चरण में भरी गई टंकी का अंश निकालें, चलते कुल को 1 से घटाएं, और अंतिम चरण को बचे हुए पाइप(ों) से हल करें।
कार्य और मज़दूरी (Work and Wages) के प्रश्न हल सहित	यदि सभी समान दिनों तक काम करते हैं, तो मज़दूरी उनकी व्यक्तिगत एक-दिन कार्य दरों (1/अकेले काम करने में लगने वाले दिन) के अनुपात में बंटती है — तेज़ काम करने वाले को बड़ा हिस्सा मिलता है।; पहले हर व्यक्ति की एक-दिन कार्य दर (1/अकेले दिन) निकालें, उनके बीच अनुपात को सरल करें, और तभी कुल मज़दूरी को उस अनुपात में बांटें।; तीन या अधिक लोगों के लिए, जिसकी दर सीधे नहीं दी गई है उसे संयुक्त दर में से ज्ञात दरों को घटाकर निकाला जा सकता है — ठीक Time and Work की तरह।; मज़दूरी का बड़ा हिस्सा हमेशा ज़्यादा दिन काम करने का मतलब नहीं रखता — इसका मतलब है ज़्यादा कार्य दर (तेज़ व्यक्तिगत पूर्णता समय), क्योंकि यहां सभी एक साथ समान दिनों तक काम करते हैं।; ऊपर वाला "दर अनुपात से बांटें" नियम तभी लागू होता है जब सभी समान दिनों तक काम करें। यदि कोई दूसरे से कम दिन काम करे (देर से जुड़े, जल्दी छोड़ दे, या काम किए दिन सीधे अलग बताए गए हों), तो मज़दूरी वास्तविक किए गए काम से बांटनी होगी — हर व्यक्ति की दर × उसने वास्तव में जितने दिन काम किया — केवल एक-दिन दरों से नहीं।; इसके लिए, हर व्यक्ति के पूरे काम का वास्तविक अंश निकालें (दर × उनके अपने काम किए दिन), पुष्टि करें कि ये अंश मिलकर पूरा काम (1) बनते हैं, और इन्हीं अंशों को — केवल दरों को नहीं — मज़दूरी-बंटवारे के अनुपात के रूप में उपयोग करें।
समय, चाल और दूरी — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	दूरी = चाल × समय; 1 m/s = 18/5 km/h; औसत चाल = कुल दूरी/कुल समय; मिलने और पार करने के लिए सापेक्ष चाल (विपरीत दिशा में योग, समान दिशा में अंतर) उपयोग करें। बिंदु वस्तु पार करने में केवल ट्रेन की अपनी लंबाई; प्लेटफॉर्म/पुल या दूसरी ट्रेन पार करने में दोनों लंबाई जोड़ें। दौड़ में बढ़त अनुपात = पूरी दूरी : (दूरी − बढ़त)।
चाल, समय और दूरी के प्रश्न हल सहित	चाल = दूरी / समय। इसे पुनर्व्यवस्थित करें तो: दूरी = चाल × समय, और समय = दूरी / चाल।; km/hr को m/s में बदलने के लिए 5/18 से गुणा करें। m/s को km/hr में बदलने के लिए 18/5 से गुणा करें।; जब एक ही दूरी दो अलग-अलग चालों a और b पर तय की जाती है (जैसे, एक ही रास्ते से जाना और लौटना), तो पूरी यात्रा के लिए औसत चाल 2ab/(a + b) होती है, सीधा औसत (a + b)/2 नहीं। यहां (a + b)/2 का उपयोग करना इस विषय की सबसे आम गलती है — यह तभी सही उत्तर देता है जब हर चाल पर बिताया गया समय बराबर हो, दूरी नहीं।; अलग-अलग दूरियों वाली यात्रा के लिए (जहां बराबर-दूरी वाला शॉर्टकट लागू नहीं होता), मूल परिभाषा पर लौटें: औसत चाल = कुल दूरी / कुल समय। यह हमेशा काम करता है, तब भी जब ऊपर वाला शॉर्टकट लागू नहीं होता।; जब दो वस्तुएं एक-दूसरे की ओर चलती हैं, तो सापेक्ष चाल उनकी चालों का योग होती है; मिलने (या ट्रेनों के पार करने) का समय इस संयुक्त चाल से निकलता है। जब दो वस्तुएं एक ही दिशा में चलती हैं, तो सापेक्ष चाल उनकी चालों का अंतर होती है।; मिलन-बिंदु के प्रश्न: यदि दो वस्तुएं एक साथ D दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से एक-दूसरे की ओर a और b चाल से चलती हैं, तो वे D/(a + b) समय बाद मिलती हैं, पहले बिंदु से a × D/(a + b) दूरी पर।; ठहराव-समय के प्रश्न: यदि किसी ट्रेन की बिना रुके चाल s_1 है और ठहराव सहित औसत चाल s_2 है, तो प्रति घंटे ठहराव में खोया समय = $(1 - s_2/s_1) \times 60$ मिनट होता है।; एक ही गणना में इकाइयां एक समान रखें — बिना बदले km को मिनट के साथ, या m/s को घंटे के साथ मिलाना, सही विधि होने पर भी गलत उत्तर देने का आम कारण है।

ट्रेन से जुड़े प्रश्न हल सहित	एक स्थिर बिंदु (खंभा, स्थिर खड़ा आदमी, सिग्नल) को पार करने का मतलब है ट्रेन अपनी खुद की लंबाई के बराबर दूरी तय करती है — उस बिंदु को शून्य लंबाई वाला मानें।; एक प्लेटफ़ॉर्म (या पुल) को पार करने का मतलब है ट्रेन अपनी खुद की लंबाई प्लस प्लेटफ़ॉर्म की लंबाई के बराबर दूरी तय करती है — पूरी ट्रेन को पूरे प्लेटफ़ॉर्म को पार करना होता है।; दो ट्रेनों का एक-दूसरे को पार करना: सापेक्ष गति (विपरीत दिशाओं के लिए गति का योग, एक ही दिशा के लिए गति का अंतर) का उपयोग करें, और तय करने वाली दूरी दोनों ट्रेनों की लंबाई का योग होती है — वस्तुओं वाला वही नियम, बस अब दो लंबाइयों के साथ।; यदि ट्रेन किसी चलते हुए (स्थिर नहीं) व्यक्ति को पार करती है, तो सापेक्ष गति का उपयोग ठीक दो ट्रेनों की तरह करें — विपरीत दिशाओं के लिए गति जोड़ें, एक ही दिशा के लिए घटाएं — लेकिन तय करने वाली दूरी अब भी बस ट्रेन की अपनी लंबाई है, क्योंकि व्यक्ति की कोई लंबाई नहीं जोड़नी है।; "मिलने के बाद आगे जाने" वाले प्रश्न: यदि दो ट्रेनें एक-दूसरे की ओर चलना शुरू करती हैं और पार करने के बाद, दूसरी ट्रेन के शुरुआती स्टेशन तक पहुंचने में क्रमशः a और b घंटे लेती हैं, तो (ट्रेन 1 की गति) / (ट्रेन 2 की गति) = √(b/a) होता है।; मीटर में लंबाई और सेकंड में समय के साथ काम करने से पहले हमेशा km/hr को m/s में बदलें (× 5/18) — इकाइयों को मिलाना यहां सबसे आम गलती है।
रेस और गेम्स के प्रश्न हल सहित	"A, B को X मीटर से हराता है" का मतलब है: जिस क्षण A फिनिश करता है, उस समय B को अभी भी X मीटर दौड़ना बाकी होता है।; "A, B को X मीटर की शुरुआत देता है" का मतलब है B को फिनिश करने के लिए केवल (कुल दूरी − X) तय करनी होती है — B प्रभावी रूप से X मीटर आगे से शुरू करता है।; "A, B को X सेकंड की शुरुआत देता है" का मतलब है B, A से X सेकंड पहले दौड़ना शुरू करता है — B की शुरुआती-बढ़त-समायोजित घड़ी पाने के लिए A के फिनिश समय में X सेकंड जोड़ें।; "डेड हीट" (दोनों एक साथ फिनिश करते हैं) के लिए, यह शर्त स्थापित करें कि दोनों अपनी आवश्यक दूरी ठीक उसी समय में तय करते हैं, फिर अज्ञात के लिए हल करें।; एक "दूरी शुरुआत" और एक "समय शुरुआत" एक-दूसरे में बदल जाती हैं जब आप धीमे धावक की गति जान लें: T सेकंड की समय-शुरुआत, (T × उस धावक की गति) मीटर की दूरी-शुरुआत के बराबर होती है, और इसके उल्टा भी।; तीन धावकों के लिए, जहां आपको बताया जाए कि A, B को कितने से हराता है और B, C को कितने से हराता है (रेस दूरी के अंश या प्रतिशत के रूप में), दोनों गति-अनुपातों को गुणा करके मिलाएं — बस दोनों "हराने" की दूरियां न जोड़ें, क्योंकि हर एक का आधार अलग है।
बीजगणित — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	$(a\pm b)^2 = a^2\pm 2ab+b^2$; $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; गुणनखंड केवल शून्येतर होने पर काटें; संयुग्मी से परिमेयीकरण करें; y=mx+c का ढाल m है। द्विघात: $(x-p)(x-q)=0$ में गुणनखंडित करें या द्विघात सूत्र उपयोग करें। युगपत समीकरण: गुणांक मिलाकर एक चर हटाएं। घन सर्वसमिकाएं: $a^3\pm b^3 = (a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$।
सर्ड्स और इंडाइसिज़ के प्रश्न हल सहित	एक ही आधार की घातों के लिए: $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (गुणा करते समय घातें जोड़ें); $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (भाग करते समय घटाएं); $(a^m)^n = a^{mn}$ (घात की घात लेते समय गुणा करें)।; किसी भी शून्येतर संख्या की घात 0 हमेशा 1 होती है ($a^0 = 1$)। एक ऋणात्मक घात का मतलब है "व्युत्क्रम": $a^{-n} = 1/a^n$।; एक सर्ड एक अपरिमेय मूल है जिसे पूर्ण संख्या में सरल नहीं किया जा सकता, जैसे √2 या √3 (√4 = 2 सर्ड नहीं है, क्योंकि यह पूरी तरह सरल हो जाता है)। इसे सरल करने के लिए, सबसे बड़ा पूर्ण-वर्ग गुणनखंड निकालें: √50 = √(25 × 2) = 5√2।; हर में सर्ड वाली भिन्न को "परिमेयीकृत" करने के लिए, अंश और हर दोनों को उस सर्ड (या यदि हर में दो पद हों तो उसके संयुग्म) से गुणा करें, ताकि हर एक पूर्ण संख्या बन जाए: 1/√2 = √2/2।; भिन्नात्मक घातें मूल होती हैं: a^(1/n) = ⁿ√a (a का n-वां मूल), और a^(m/n) = (ⁿ√a)^m — मूल और घात को किसी भी क्रम में लागू करें, जो भी हाथ से करना आसान हो।; जब किसी समीकरण के दोनों पक्ष एक ही आधार की घातें हों, तो केवल घातों को बराबर करें: यदि a^x = a^y (a > 0, a ≠ 1 के साथ), तो x = y।; केवल "समान" सर्ड (मूल के नीचे एक ही संख्या) सीधे जुड़ते या घटते हैं, उनके गुणांकों को जोड़कर या घटाकर — 3√2 + 5√2 = 8√2, लेकिन √2 + √3 को एक सर्ड पद में नहीं मिलाया जा सकता। दो अलग सर्ड्स की तुलना के लिए, मूल हटाने के लिए दोनों को वर्ग करें, फिर वर्गित मानों की तुलना करें।
द्विघात समीकरण के प्रश्न हल सहित	समीकरण I को हल करके x के सभी मान और समीकरण II को हल करके y के सभी मान निकालें — हर द्विघात समीकरण आमतौर पर दो मूल देता है।; हर x की तुलना हर y से करें। यदि x हर संयोजन में बड़ा है, तो उत्तर "x > y" है; यदि x हमेशा छोटा है, तो यह "x < y" है।; यदि कुछ संयोजन x को बड़ा और कुछ x को बराबर दिखाते हैं, तो उत्तर "x ≥ y" है (और इसी तरह "x ≤ y") — "x > y" नहीं, क्योंकि बराबरी भी होती है।; यदि संयोजन वास्तव में टकराते हैं — कुछ x > y देते हैं, कुछ x < y (या x = y) — तो कोई एक संबंध हर स्थिति को कवर नहीं करता, इसलिए उत्तर "निर्धारित नहीं किया जा सकता" है।; जब कोई समीकरण पूर्णांकों में साफ-साफ फैक्टर नहीं होता, तो द्विघात सूत्र का उपयोग करें: $ax^2 + bx + c = 0$ के लिए, $x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$। विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$ हल करने से पहले ही मूलों की प्रकृति बता देता है: D > 0 पर दो भिन्न वास्तविक मूल, D = 0 पर एक दोहरा वास्तविक मूल, D < 0 पर कोई वास्तविक मूल नहीं।; पूरी तरह हल किए बिना शॉर्टकट: मूलों का योग = −b/a, और गुणनफल = c/a। ऋणात्मक गुणनफल का मतलब है दोनों मूलों के चिह्न विपरीत हैं (एक धनात्मक, एक ऋणात्मक) — इसे पहले ही जांच लेना फायदेमंद है, क्योंकि एक ऋणात्मक मूल अक्सर वरना साफ दिखने वाले "x > y" या "x < y" पैटर्न को तोड़ देता है।; आम गलतियां: द्विघात सूत्र में वर्गमूल लेते समय ± भूल जाना, और फैक्टर करते समय चिह्न की गलती — हमेशा फैक्टर किए रूप को मन में दोबारा खोलकर जांचें कि वह मूल समीकरण जैसा ही बनता है।

सरल समीकरण (Simple Equations) के प्रश्न हल सहित	प्रश्न वास्तव में जिस अज्ञात मात्रा के बारे में पूछता है उसके लिए एक चर निर्धारित करें, और उस चर (और यदि दो अज्ञात हैं तो एक दूसरे चर) का उपयोग करके हर वाक्य को एक समीकरण में बदलें।; वाक्यांश सीधे बदलते हैं: "का योग" → +, "का अंतर" → −, "Y से X अधिक" → Y + X, "Y से X कम" → Y − X, "किसी संख्या का दोगुना/तिगुना" → 2x/3x।; दो अज्ञात के साथ, आपको दो स्वतंत्र समीकरणों की ज़रूरत होती है — किसी एक को हल करने की कोशिश करने से पहले दोनों लिखें।; हल करने के बाद, अपने उत्तर को दोनों मूल वाक्यों में (केवल समीकरण में नहीं) वापस रखकर पुष्टि करें कि यह वास्तव में शब्द-समस्या को संतुष्ट करता है, केवल बीजगणित को नहीं।; जब दो अज्ञातों वाले समीकरण सीधे "योग" और "अंतर" न हों (जैसे अलग-अलग दरों पर मिश्रित मात्राएं), तो व्युत्क्रमण (elimination) का उपयोग करें — एक या दोनों समीकरणों को इस तरह बड़ा करें कि किसी चर का गुणांक बराबर हो जाए, फिर घटाकर उसे हटाएं — या प्रतिस्थापन (substitution) का उपयोग करें — एक समीकरण से एक चर हल करें और दूसरे में रखें।; "क्रमागत संख्याओं" वाले प्रश्नों के लिए, सभी को एक ही चर में एक निश्चित अंतराल के साथ व्यक्त करें: क्रमागत पूर्णांकों के लिए x, x+1, x+2, ...; क्रमागत सम या विषम संख्याओं के लिए x, x+2, x+4, ...। उनका दिया गया योग या संबंध तब एक सरल समीकरण बन जाता है।
बीजगणितीय सर्वसमिकाएं (Algebraic Identities) के प्रश्न हल सहित	दो मूल सर्वसमिकाएं: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, और $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$। पुनर्व्यवस्थित करने पर, हर एक a^2+b^2 को $(a+b)^2$ या $(a-b)^2$ और ab से जोड़ती है — तीनों में से कोई भी दो दिए जाने पर, तीसरा ज्ञात करें।; वर्गों का अंतर: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ — यह दो संख्याओं को गुणा करने की तरकीब है जो एक गोल संख्या से बराबर दूरी पर हैं, जैसे $97\times103 = (100-3)(100+3)$।; जब कोई प्रश्न a+b (या a−b) और ab देता है, तो यह परखता है कि क्या आप जानते हैं $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ (या $(a-b)^2 + 2ab$) — पहले a और b को अलग-अलग खोजने की कोशिश न करें।; ये सर्वसमिकाएं दोनों दिशाओं में काम करती हैं: किसी अभिव्यक्ति को विस्तारित करने के लिए, या a^2+b^2 और a+b (या a−b) से वापस ab खोजने के लिए इनका उपयोग करें।; घनों का योग और अंतर: $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, और $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ — इनसे किसी घन अभिव्यक्ति को गुणनखंडित करें, जैसे $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$।; जब आप पहले से a+b (या a−b) और ab जानते हों, तो a^3+b^3 या a^3-b^3 पाने का तेज़ तरीका: $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$, और $a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ — यह $a^2 \mp ab+b^2$ को अलग से निकालने से बचाता है।
बैंकर्स डिस्काउंट और सत्य बट्टा (True Discount) के प्रश्न हल सहित	वर्तमान मूल्य (PW) वह राशि है जो आज दी गई दर पर निवेश करने पर भविष्य की तारीख में देय राशि (A) में बढ़ जाएगी। सत्य बट्टा (TD) = A − PW; सूत्र: $PW = 100\times A / (100 + R\times T)$, तो TD = A − PW, जहां R वार्षिक दर है और T वर्षों में समय है; बैंकर्स डिस्काउंट (BD) सरल है पर कम सटीक — यह बस अवधि-शेष समय के लिए पूरी भविष्य की राशि पर साधारण ब्याज है: $BD = A\times R\times T / 100$। BD हमेशा TD से ≥ होता है; बैंकर्स गेन (BG) = BD − TD — वह अतिरिक्त राशि जो बैंकर छोटे वर्तमान मूल्य के बजाय पूरी भविष्य की राशि पर ब्याज लेकर प्रभावी रूप से कमाता है; कुछ मान पहले से होने पर उपयोगी शॉर्टकट: बैंकर्स गेन = $TD^2 / PW = (BD \times TD) / A$। इनसे अलग से R और T निकाले बिना सीधे BG पाया जा सकता है; जो उलटे प्रश्न सीधे BD और TD (या BG) देते हैं उन्हें चरण-दर-चरण हल करें: पहले BG = BD − TD निकालें, फिर $PW = TD^2/BG$, फिर A = PW + TD, और अंत में $TD = A\times RT/(100+RT)$ का उपयोग करके दर (दिए गए समय के लिए) या समय (दी गई दर के लिए) निकालें।
नाव और धारा: डाउनस्ट्रीम और अपस्ट्रीम चाल	डाउनस्ट्रीम = नाव + धारा; अपस्ट्रीम = नाव − धारा। नाव की चाल = (D+U)/2; धारा की चाल = (D−U)/2। राउंड ट्रिप औसत चाल = 2DU/(D+U)। अपस्ट्रीम:डाउनस्ट्रीम समय अनुपात उल्टा होकर चाल अनुपात देता है। धारा की चाल हमेशा नाव की चाल से कम होनी चाहिए (S < B)।
नाव और धारा (बोट एंड स्ट्रीम) के प्रश्न हल सहित	यदि शांत पानी में नाव की चाल B है और धारा की चाल S है: धारा की दिशा में (डाउनस्ट्रीम) चाल = B + S। धारा के विपरीत (अपस्ट्रीम) चाल = B − S।; डाउनस्ट्रीम चाल (D) और अपस्ट्रीम चाल (U) दिए जाने पर, आप सूत्र को उल्टा करके नाव और धारा की अपनी चाल निकाल सकते हैं: नाव की चाल = (D + U) / 2, धारा की चाल = (D − U) / 2।; एक बार आपके पास डाउनस्ट्रीम या अपस्ट्रीम चाल आ जाए, तो यह एक सामान्य चाल, समय और दूरी का सवाल है — हमेशा की तरह समय = दूरी / चाल लागू करें।; एक ही दूरी डाउनस्ट्रीम और वापस अपस्ट्रीम तय करने वाले राउंड ट्रिप के लिए, चाल, समय और दूरी वाला वही दो-असमान-चाल औसत-चाल शॉर्टकट उपयोग करें: औसत चाल = 2 × डाउनस्ट्रीम चाल × अपस्ट्रीम चाल / (डाउनस्ट्रीम चाल + अपस्ट्रीम चाल)।; यदि प्रश्न में एक-तरफा डेटा के बजाय राउंड ट्रिप का कुल समय दिया है, तो एक समीकरण बनाएं: कुल समय = दूरी/डाउनस्ट्रीम चाल + दूरी/अपस्ट्रीम चाल, और अज्ञात (आमतौर पर दूरी) के लिए हल करें।; यदि समान दूरी के लिए अपस्ट्रीम में लगने वाला समय डाउनस्ट्रीम समय का कोई गुणज n है, तो डाउनस्ट्रीम चाल = n × अपस्ट्रीम चाल (क्योंकि स्थिर दूरी के लिए समय और चाल व्युत्क्रमानुपाती हैं) — इससे नाव की चाल : धारा की चाल = (n + 1) : (n − 1) मिलता है।; ध्यान से पढ़ें कि "नाव की चाल" का मतलब उसकी शांत पानी की चाल है या पहले से संयुक्त डाउनस्ट्रीम/अपस्ट्रीम चाल — शब्दों से ही तय होता है कि पहले कौन सा सूत्र लागू करें।

चेन रूल (Chain Rule) के प्रश्न हल सहित	पहचानें कि क्या हर जोड़ी की मात्राएं प्रत्यक्ष रूप से आनुपातिक हैं (दोनों एक साथ बढ़ते हैं, जैसे लागत और मात्रा) या व्युत्क्रम रूप से आनुपातिक हैं (एक बढ़ने पर दूसरा घटता है, जैसे एक निश्चित काम के लिए श्रमिक और दिन); अधिक श्रमिक → कम दिन चाहिए (व्युत्क्रम)। प्रति दिन अधिक घंटे → कम दिन चाहिए (व्युत्क्रम)। अधिक काम करना है → अधिक दिन चाहिए (प्रत्यक्ष); अज्ञात को इस तरह स्थापित करें: नया मान = पुराना मान × (वह अनुपात जो हर संबंध के लिए समझ में आता है) — व्युत्क्रम संबंध के लिए, अनुपात पुराना/नया है; प्रत्यक्ष संबंध के लिए, यह नया/पुराना है; हर प्रासंगिक अनुपात को एक-एक जोड़ी हल करने के बजाय एक ही समीकरण में एक साथ जोड़ें — इससे गोलाई की त्रुटियां और उलझे हुए मध्यवर्ती चरण टल जाते हैं; राशन/भोजन-अवधि वाले प्रश्न असल में छुपा हुआ व्युत्क्रम-अनुपात चेन रूल हैं: एक निश्चित भोजन भंडार को बांटने वाले अधिक लोग होने पर वह कम दिन चलता है। यदि बीच में संख्या बदल जाए, तो चरणों में बांटें — पहले देखें बदलाव से पहले कितना भंडार उपयोग हुआ, कितना बचा, फिर उसे नई संख्या से भाग दें; यदि कुल काम भी बदल जाए (केवल श्रमिक/दिन/घंटे नहीं) — जैसे एक लंबी दीवार, या बड़ा काम — तो चेन में एक और प्रत्यक्ष-अनुपात कारक जोड़ें: (नया काम / पुराना काम), क्योंकि बाकी सब बराबर होने पर अधिक काम में अधिक दिन लगते हैं।
ज्यामिति: वृत्त — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	केंद्र से लंब जीवा को समद्विभाजित करता है। केंद्रीय कोण = 2 × उसी चाप पर अंतःस्थ कोण। चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180°। स्पर्श रेखा ⊥ स्पर्श बिंदु पर त्रिज्या; एक बाहरी बिंदु से दो स्पर्श रेखाएं समान हैं। सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (R−r) उपयोग करती है; तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (R+r) उपयोग करती है, केवल तभी जब वृत्त अलग हों।
ज्यामिति: रेखाएँ और त्रिभुज — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	सीधी रेखा कोणों का योग 180°; शीर्षाभिमुख कोण समान; त्रिभुज कोणों का योग 180°; बाह्य कोण = दूरस्थ अंतः कोणों का योग। समरूप त्रिभुज: भुजाएं रैखिक रूप से स्केल होती हैं, क्षेत्रफल वर्ग से स्केल होते हैं। पाइथागोरस विलोम: $a^2+b^2=c^2$ का अर्थ है त्रिभुज c के सामने समकोण है। कोण समद्विभाजक प्रमेय: BD:DC = AB:AC। केन्द्रक हर माध्यिका को शीर्ष से 2:1 में विभाजित करता है।
ज्यामिति: रेखाएं, कोण और त्रिभुज के प्रश्न हल सहित	किसी भी त्रिभुज के कोणों का योग हमेशा 180° होता है। कोई भी दो कोण दिए जाने पर, तीसरा कोण पाने के लिए उनके योग को 180° से घटाएं।; जब कोण एक अनुपात के रूप में दिए जाएं (जैसे 2:3:4), तो हर भाग को एक चर दें (2x, 3x, 4x), उनके योग को 180° के बराबर रखें, x के लिए हल करें, फिर हर वास्तविक कोण पाने के लिए वापस गुणा करें।; एक त्रिभुज का बाह्य कोण (एक भुजा को बढ़ाकर बनाया गया) उसके आसन्न न होने वाले दो आंतरिक कोणों के योग के बराबर होता है — यह पहले तीसरे आंतरिक कोण को निकालकर 180° से घटाने से तेज़ है।; एक बाह्य कोण और उसका आसन्न आंतरिक कोण हमेशा 180° जोड़ते हैं (वे एक सीधी रेखा बनाते हैं) — यह तब उपयोगी है जब कोई प्रश्न दोनों को मिलाता है।; त्रिभुज असमानता: त्रिभुज की किसी भी दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होना चाहिए। इसका उपयोग यह जांचने के लिए करें कि दी गई तीन लंबाइयां वास्तव में त्रिभुज बना भी सकती हैं या नहीं, कोण संबंधी कार्य से पहले।; एक समद्विबाहु त्रिभुज में, दो बराबर भुजाओं के सामने वाले दो कोण स्वयं बराबर होते हैं; एक समबाहु त्रिभुज में, तीनों भुजाएं बराबर होती हैं और तीनों कोण 60° होते हैं।; जब एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटती है: संगत कोण बराबर होते हैं, एकांतर कोण बराबर होते हैं, और सह-अंतःस्थ (allied) कोण 180° जोड़ते हैं। ये तीन तथ्य आमतौर पर समांतर-रेखा आकृति में अज्ञात कोण निकालने देते हैं।
ऊँचाई और दूरी — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	$\tan\theta$ = (ऊर्ध्वाधर ऊंचाई)/(क्षैतिज दूरी), पर्यवेक्षक की आंख के स्तर से; ज़मीन-स्तर ऊंचाई पूछे जाने पर आंख की ऊंचाई जोड़ें। $\tan30°=1/\sqrt{3}$, $\tan45°=1$, $\tan60°=\sqrt{3}$। दो-स्थिति प्रश्न: हर स्थिति के लिए एक ही अज्ञात ऊंचाई के साथ एक tan समीकरण लिखें, और ज्ञात चलने की दूरी को दोनों क्षैतिज दूरियों के अंतर के रूप में उपयोग करें। सीढ़ी प्रश्न: ऊंचाई = लंबाई × $\sin\theta$ (सीढ़ी कर्ण है)।
ऊंचाई और दूरी (Height and Distance) के प्रश्न हल सहित	तीन मानक कोण और उनके टैंजेंट मान (यहां सबसे ज़्यादा उपयोग होने वाला अनुपात): $\tan 30° = 1/\sqrt{3}$, $\tan 45° = 1$, $\tan 60° = \sqrt{3}$।; उन्नयन कोण (angle of elevation) क्षैतिज रेखा से ऊपर की ओर मापा जाता है (किसी चीज़ को ऊपर देखते हुए); अवनमन कोण (angle of depression) क्षैतिज रेखा से नीचे की ओर मापा जाता है (किसी चीज़ को नीचे देखते हुए) — दोनों क्षैतिज रेखा से मापे जाते हैं, ज़मीन या वस्तु से नहीं।; tan(कोण) = सम्मुख भुजा / आसन्न भुजा, जहां "सम्मुख" ऊंचाई (ऊर्ध्वाधर) है और "आसन्न" आधार से क्षैतिज दूरी है — पहले त्रिभुज बनाएं, ऊंचाई और दूरी को लेबल करें, फिर tan लागू करें।; एक तिरछी रेखा (जैसे सीढ़ी या तार, जो कर्ण होती है) के लिए, tan के बजाय sin या cos का उपयोग करें: जब कोण ज़मीन के साथ हो तो cos(कोण) = आसन्न/कर्ण, sin(कोण) = सम्मुख/कर्ण।; यदि पर्यवेक्षक आधार की ओर या उससे दूर एक ज्ञात दूरी चलने पर उन्नयन कोण बदल जाए, तो हर स्थिति पर अलग tan समीकरण बनाएं (दोनों एक ही अज्ञात ऊंचाई साझा करते हुए), फिर दोनों को साथ हल करें।; "इमारत के ऊपर झंडे/एंटीना" वाले प्रश्न के लिए, जहां एक ही बिंदु से झंडे के नीचे और ऊपर दोनों के उन्नयन कोण दिए हों, एक ही क्षैतिज दूरी साझा करने वाले दो समकोण त्रिभुज बनाएं, हर ऊंचाई निकालें, और झंडे की अपनी लंबाई पाने के लिए घटाएं।
LCM और HCF: अभाज्य गुणनखंडन और गुणनफल शॉर्टकट	HCF = साझा अभाज्य गुणनखंड सबसे कम घात पर; LCM = सभी अभाज्य गुणनखंड सबसे ज़्यादा घात पर। HCF × LCM = a × b केवल दो संख्याओं के लिए सही है, तीन या अधिक के लिए कभी नहीं। समान-शेषफल प्रश्न: (संख्याओं में से शेषफल घटाकर) का HCF। बड़ी संख्याएं: क्रमिक (यूक्लिड) विभाजन उपयोग करें। भिन्न: HCF = HCF(अंश)/LCM(हर), LCM = LCM(अंश)/HCF(हर)। सहअभाज्य संख्याएं: LCM = उनका गुणनफल।

ल.स. और म.स. (LCM और HCF) के प्रश्न हल सहित	HCF (महत्तम समापवर्तक) सबसे बड़ी संख्या है जो हर दी गई संख्या को पूरी तरह विभाजित करती है। LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) सबसे छोटी संख्या है जिसे हर दी गई संख्या पूरी तरह विभाजित करती है।; अभाज्य गुणनखंडन विधि: हर संख्या को अभाज्य गुणनखंडों में तोड़ें। HCF = साझा अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल, हर एक संख्याओं में उसकी सबसे कम घात पर। LCM = सभी अभाज्य गुणनखंडों (साझा और गैर-साझा दोनों) का गुणनफल, हर एक की सबसे ज़्यादा घात पर।; दो संख्याओं a और b के लिए उपयोगी शॉर्टकट: HCF(a, b) × LCM(a, b) = a × b। यह आपको दोबारा गुणनखंडन किए बिना एक से दूसरा सीधे निकालने देता है। यदि a और b सह-अभाज्य (co-prime) हैं (HCF = 1), तो यह और सरल हो जाता है: LCM = a × b सीधे।; "X, Y और Z को विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या जो हर बार वही शेषफल R छोड़े" वाले प्रश्नों के लिए, सीधे X, Y, Z के बजाय (X − R), (Y − R) और (Z − R) का HCF ज्ञात करें।; "a, b और c से विभाज्य सबसे छोटी संख्या" = LCM(a, b, c)। "a, b और c से भाग देने पर हर बार वही शेषफल R छोड़ने वाली सबसे छोटी संख्या" = LCM(a, b, c) + R।; "a, b और c से भाग देने पर, हर शेषफल अपने भाजक से ठीक k कम हो" (पहले हर भाजक के लिए यह जांच लें) तो सबसे छोटी संख्या = LCM(a, b, c) − k।; नियत अंतराल पर दोहराई जाने वाली घटनाएं जिन्हें फिर साथ होना है (घंटियां साथ बजना, धावकों का साथ शुरू होना, लाइटों का साथ बदलना) LCM का उपयोग है: वे अगली बार कब साथ होंगी, यह उनके अलग-अलग अंतरालों के LCM से मिलता है।
भिन्नों का HCF और LCM के प्रश्न हल सहित	भिन्नों का HCF = अंशों का HCF / हरों का LCM — बशर्ते हर भिन्न पहले अपने सबसे सरल रूप में लिखी गई हो (अंश और हर में कोई साझा गुणनखंड न हो)।; भिन्नों का LCM = अंशों का LCM / हरों का HCF — वही सरलतम-रूप शर्त के साथ।; अंशों का HCF या हरों का LCM निकालने से पहले हमेशा हर दी गई भिन्न को पहले सबसे सरल रूप में बदलें। इसे छोड़ने से चुपचाप गलत उत्तर मिल सकता है: 2/4 और 3/6 (दोनों 1/2 के बराबर) के लिए, बिना सरल किए सीधा सूत्र HCF(2,3)/LCM(4,6) = 1/12 देता है — जो सही HCF नहीं है, क्योंकि 1/2 खुद एक बहुत बड़ा मान है जिसका दोनों भिन्नें ठीक गुणज हैं। पहले सरल करने पर (1/2 और 1/2) सही उत्तर HCF = 1/2 मिलता है।; अंतिम उत्तर को सरल करना (यदि वह पहले से सबसे सरल रूप में नहीं है) एक अलग, वैकल्पिक अंतिम चरण है जो उत्तर को साफ बनाता है — यह इनपुट को पहले सरल करने का विकल्प नहीं है, और उस चरण को छोड़ने से हुई गलती को भरोसे से ठीक नहीं करेगा।; अपना उत्तर जांचें: भिन्नों का HCF हर दी गई भिन्न में बिल्कुल विभाजित होना चाहिए (हर मूल भिन्न ÷ आपका HCF एक पूर्ण संख्या होनी चाहिए); भिन्नों का LCM खुद हर दी गई भिन्न से बिल्कुल विभाज्य होना चाहिए (आपका LCM ÷ हर मूल भिन्न एक पूर्ण संख्या होनी चाहिए)।; पूरी प्रक्रिया पूर्णांक HCF/LCM जैसी ही है — हर भिन्न को सरल करें, अंशों और हरों पर बताए अनुसार HCF/LCM लागू करें, फिर ज़रूरत हो तो परिणाम को सरल करें। एकमात्र नया कौशल एक साथ अंश और हर दोनों को संभालना है, न कि केवल एक संख्या।
क्षेत्रमिति: 2D — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	आयत: क्षेत्रफल=lb, परिमाप=2(l+b)। वर्ग: क्षेत्रफल=s^2, परिमाप=4s। त्रिभुज: क्षेत्रफल=½×आधार×ऊंचाई। समचतुर्भुज: क्षेत्रफल=½×d_1×d_2। समलंब: क्षेत्रफल=½×(समांतर भुजाओं का योग)×ऊंचाई। वृत्त: परिधि=2πr, क्षेत्रफल=πr^2। त्रिज्यखंड: क्षेत्रफल और चाप लंबाई दोनों पूर्ण वृत्त सूत्र का वही अंश (कोण/360°) उपयोग करते हैं। नियमित षट्भुज शॉर्टकट: क्षेत्रफल=(3√3/2)×भुजा^{2}।
क्षेत्रमिति (क्षेत्रफल और परिमाप) के प्रश्न हल सहित	परिमाप किसी आकृति के चारों ओर की दूरी है; क्षेत्रफल वह स्थान है जो वह घेरती है। आयत: परिमाप = 2(लंबाई + चौड़ाई), क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई। वर्ग (बराबर भुजाओं वाला आयत): परिमाप = 4 × भुजा, क्षेत्रफल = भुजा^{2}।; वृत्त: परिधि = 2πr, क्षेत्रफल = πr^2। जब त्रिज्या 7 की गुणज हो तो π ≈ 22/7 का उपयोग करें (यह साफ कट जाता है); अन्यथा π ≈ 3.14 का उपयोग करें।; त्रिभुज: क्षेत्रफल = (1/2) × आधार × ऊंचाई। विशेष रूप से एक समकोण त्रिभुज के लिए, समकोण पर मिलने वाली दोनों भुजाओं को सीधे आधार और ऊंचाई के रूप में उपयोग किया जा सकता है। जब केवल तीन भुजाएं a, b, c ज्ञात हों (ऊंचाई नहीं), तो हीरोन के सूत्र का उपयोग करें: क्षेत्रफल = √(s(s−a)(s−b)(s−c)), जहां s = (a+b+c)/2 अर्ध-परिमाप है।; समांतर चतुर्भुज: क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई, जहां ऊंचाई समांतर भुजाओं के बीच की लंबवत दूरी है, तिरछी भुजा की लंबाई नहीं। समचतुर्भुज (सभी भुजाएं बराबर वाला समांतर चतुर्भुज): क्षेत्रफल = (1/2) × d_1 × d_2, दोनों विकर्णों का उपयोग करते हुए।; समलंब (ट्रेपीज़ियम): क्षेत्रफल = (1/2) × (दोनों समांतर भुजाओं का योग) × ऊंचाई।; समबाहु त्रिभुज (जहां हीरोन का सूत्र सरल हो जाता है): क्षेत्रफल = (√3/4) × भुजा^{2}।; वृत्त का खंड (सेक्टर) (पूरे 360° में से θ डिग्री का "टुकड़ा"): क्षेत्रफल = (θ/360) × πr^2, और चाप की लंबाई = (θ/360) × 2πr। अर्धवृत्त दोनों सूत्रों में θ = 180° रखने पर ही मिलता है।; "खेत के चारों ओर रास्ता" या "सीमा" वाले प्रश्नों के लिए, बाहरी आकृति और भीतरी आकृति का क्षेत्रफल अलग-अलग निकालें, फिर घटाएं — रास्ते का क्षेत्रफल सीधे एक टुकड़े के रूप में निकालने की कोशिश न करें।
क्षेत्रमिति: 3D — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	घनाभ: आयतन=lbh, TSA=2(lb+bh+hl)। घन: आयतन=s^3, TSA=6s^2। बेलन: आयतन=πr^2h, CSA=2πrh, TSA=2πr(h+r)=CSA+2 वृत्ताकार सिरे। शंकु: आयतन=πr^2h/3, पार्श्व क्षेत्रफल=πrl (l=तिरछी ऊंचाई)। गोला: आयतन=4πr^3/3, SA=4πr^2। अर्धगोला: आयतन=(2/3)πr^3, वक्र क्षेत्रफल=2πr^2, कुल क्षेत्रफल=3πr^2 - तीन अलग राशियां। पिघलाना/पुनः ढालना आयतन संरक्षित रखता है, पृष्ठीय क्षेत्रफल नहीं।
मिश्रण और एलीगेशन — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	मिश्रण मूल्य/सांद्रता = भारित योग/कुल मात्रा; एलीगेशन अनुपात = (अधिक − औसत):(औसत − कम)। दो घोल मिलाना: भाग देने से पहले वास्तविक घटक मात्राएं (आयतन × सांद्रता) जोड़ें। n बदलाव संक्रियाओं के बाद बरकरार अंश = (1 − हटाया/कुल)^n - एक ज्यामितीय क्षय, रैखिक नहीं।

मिश्रण और मिश्रण-क्रिया (एलिगेशन) के प्रश्न हल सहित	एलिगेशन नियम: एक सस्ती वस्तु (मूल्य C) और एक महंगी वस्तु (मूल्य D) को इस तरह मिलाने के लिए कि मिश्रण का औसत मूल्य M हो, आवश्यक अनुपात है सस्ती : महंगी = (D − M) : (M − C)। यह तभी अर्थपूर्ण है जब M, C और D के बीच हो — यदि लक्षित औसत इस दायरे से बाहर है, तो वर्णित मिश्रण असंभव है।; यह बस भारित-औसत समीकरण को पुनर्व्यवस्थित किया गया रूप है — आप हमेशा मिले अनुपात से सीधे भारित औसत निकालकर जांच सकते हैं कि वह लक्षित औसत के बराबर है या नहीं।; यही नियम किसी भी "सांद्रता" वाली चीज़ पर काम करता है — दूध-पानी के मिश्रण, मिश्रधातु की संरचना, यहां तक कि दो कक्षाओं के औसत अंक मिलाने पर भी — केवल मूल्यों पर नहीं।; "क्रय मूल्य बनाम विक्रय मूल्य" वाले एलिगेशन प्रश्नों के लिए (जैसे मुफ्त पानी मिलाकर दूध को पतला करके लाभ कमाना), पानी का मूल्य ₹0 मानें और अनुपात सूत्र लागू करने से पहले लाभ प्रतिशत से मिश्रण का प्रभावी क्रय मूल्य निकालें।; तीन या अधिक घटकों को एक साथ मिलाने के लिए, दो-पद वाला एलिगेशन शॉर्टकट सीधे लागू नहीं होता — भारित-औसत की परिभाषा पर लौटें: सभी घटकों का कुल मूल्य ÷ कुल मात्रा।; बार-बार तनुकरण ("निकालो और बदलो"): यदि किसी बर्तन में शुद्ध द्रव की मात्रा V है, और हर बार x इकाइयां निकालकर पानी से बदली जाती हैं, तो n बार ऐसा करने के बाद बचा शुद्ध द्रव = V × (1 − x/V)ⁿ होता है। यह ज्यामितीय ह्रास है, रेखीय नहीं — सीधे nx घटाना गलत होगा।
साझेदारी — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	लाभ-बंटवारा भार = Σ(पूंजी × अवधि); बताया गया वेतन/कमीशन पहले घटाएं, फिर शेष लाभ इन भारों से बांटें। निकलने/जुड़ने वाले साझेदार का भार केवल उसके वास्तविक निवेशित महीने गिनता है। कुल लाभ पर कमीशन: सीधे गणना करें (दर × कुल)। कमीशन के बाद के लाभ पर कमीशन: समीकरण बनाएं, क्योंकि अज्ञात दोनों तरफ दिखता है।
साझेदारी (पार्टनरशिप) के प्रश्न हल सहित	यदि सभी साझेदार एक ही अवधि के लिए निवेश करते हैं, तो लाभ बस उनकी पूंजी राशियों के अनुपात में बंटता है।; यदि साझेदार अलग-अलग अवधियों के लिए निवेश करते हैं, तो हर साझेदार के अनुपात का हिस्सा पूंजी × समय होता है — यही गुणनफल बंटवारा तय करता है, अकेले पूंजी राशि नहीं।; यह एक गैर-स्पष्ट अनुपात पैदा कर सकता है: बहुत लंबे समय के लिए निवेश की गई छोटी पूंजी, कम समय के लिए निवेश की गई बड़ी पूंजी के बराबर या उससे भी ज़्यादा हिस्सा कमा सकती है।; यदि कोई साझेदार बीच में अपनी निवेशित राशि बदलता है (जोड़ता या निकालता है), तो उसके समय को अलग-अलग हिस्सों में बांटें और हर हिस्से के लिए पूंजी × समय निकालें, फिर उन्हें जोड़कर उस साझेदार का कुल "पूंजी-महीना" पाएं।; यदि कोई साझेदार दूसरों से बाद में जुड़ता है, तो उसका समय-गुणक केवल वह महीने हैं जिनमें उसकी पूंजी वास्तव में निवेशित थी, पूरी अवधि नहीं — हर साझेदार का समय इस आधार पर तय करें कि उसकी पूंजी कब व्यवसाय में आई।; एक "कार्यशील साझेदार" के लिए जो व्यवसाय चलाता है और अपने निवेश के रिटर्न के ऊपर उसके लिए एक अतिरिक्त निश्चित शुल्क कमाता है: पहले कुल लाभ से शुल्क घटाएं, फिर केवल शेष राशि को पूंजी × समय के अनुपात में बांटें।; उलटे प्रश्न (लाभ-बंटवारे का अनुपात देकर निवेश अनुपात पूछना) बस इसी नियम को उलटा चलाते हैं: पूंजी × समय का अनुपात = लाभ अनुपात, तो जब समय अवधि बराबर हो, पूंजी अनुपात सीधे लाभ अनुपात के बराबर होता है।
क्रमचय और संचय (परम्यूटेशन और कॉम्बिनेशन) के प्रश्न हल सहित	क्रमचय (Permutation) व्यवस्थाओं को गिनता है, जहां क्रम मायने रखता है (ABC, BCA से अलग है)। संचय (Combination) चयन को गिनता है, जहां क्रम मायने नहीं रखता (समूह {A, B, C} चुनना क्रम चाहे जो हो, वही है); फैक्टोरियल दोनों की नींव है: n! = n × (n−1) × (n−2) × ... × 1, और परंपरा से 0! = 1; n वस्तुओं में से r लेकर क्रमचय: ${}^nP_r = n! / (n−r)!$। n वस्तुओं में से r लेकर संचय: ${}^nC_r = n! / (r! \times (n−r)!)$ — एक संचय, एक क्रमचय को r! (चुनी गई r वस्तुओं को व्यवस्थित करने के तरीकों) से भाग देकर मिलता है, क्योंकि अब क्रम मायने नहीं रखता; शब्दों पर ध्यान दें: "व्यवस्थित करें", "क्रम", "रैंक", "एक पंक्ति में खड़े होने के तरीके" क्रमचय का संकेत देते हैं। "चुनें", "चयन करें", "समिति बनाएं" (जहां केवल समूह मायने रखता है, उसके भीतर कौन क्या करता है यह नहीं) संचय का संकेत देते हैं; यदि किसी शब्द में अक्षर दोहराए गए हों, तो सभी को व्यवस्थित करना सीधे n! नहीं होता — हर अक्षर की दोहराव संख्या के फैक्टोरियल से भाग दें: व्यवस्थाएं = n! / (p! × q! × ...), जहां p, q, ... हर अलग अक्षर के दोहराव की संख्या है; मौलिक गणन सिद्धांत (fundamental counting principle): कई स्वतंत्र चरणों में होने वाले किसी कार्य के लिए, हर चरण के विकल्पों को गुणा करें। यही पासवर्ड, कोड या पंजीकरण संख्या को अंक-दर-अंक बनाने में काम आता है, न कि केवल उपसमूह गिनने में; "कम से कम" वाली शर्तें (जैसे "कम से कम 2 महिलाओं वाली समिति") आमतौर पर मामलों में बांटकर जोड़ने से (ठीक 2, ठीक 3, ...) या पूरक घटाने से (कुल तरीके घटा न्यूनतम से कम वाले तरीके) हल होती हैं — जिसमें कम मामले गिनने पड़ें वह चुनें; "दो विशेष व्यक्ति/वस्तुएं हमेशा साथ हों": उन्हें एक इकाई (ब्लॉक) मानकर चिपका दें, बची हुई इकाइयों को व्यवस्थित करें, फिर उस ब्लॉक के भीतर व्यवस्थित करने के तरीकों से गुणा करें (जोड़े के लिए 2!)।
वृत्तीय क्रमचय (Circular Permutations) के प्रश्न हल सहित	एक वृत्ताकार मेज़ के चारों ओर n अलग-अलग लोग: (n−1)! व्यवस्थाएं, n! नहीं — एक व्यक्ति की सीट तय करने से घूर्णी दोहराव हट जाते हैं (सभी को एक सीट घुमाना अभी भी वही व्यवस्था गिना जाता है); एक हार या कंगन के लिए (जहां इसे पलटने पर भी वही व्यवस्था मिलती है, न कि केवल घुमाने पर), 2 से भी भाग दें: (n−1)!/2; जब दो विशिष्ट लोगों को साथ बैठना हो, तो पहले उन्हें एक इकाई में जोड़ें। परिणामी (घटी हुई गिनती) इकाइयों को (गिनती−1)! का उपयोग करके एक वृत्त में व्यवस्थित करें, फिर जुड़ी जोड़ी एक-दूसरे का सामना करने के दो तरीकों के लिए 2 से गुणा करें; "साथ नहीं बैठना चाहिए" के लिए, कुल वृत्तीय व्यवस्थाएं ज्ञात करें, "साथ बैठने" की गिनती घटाएं — यह "साथ नहीं" वाले मामलों को सीधे गिनने की कोशिश करने से तेज़ और कम त्रुटि-प्रवण है; (n−1)! नियम तब लागू होता है जब केवल सापेक्ष स्थिति मायने रखती है (बिना निशान वाली सीटों वाली सामान्य वृत्ताकार मेज़)। यदि सीटें खुद अलग पहचान वाली हों — नंबर वाली कुर्सियां, या तय दिशाएं — तो पूरे समूह को घुमाने से वास्तव में नई व्यवस्था बनती है, और गिनती सामान्य n! होती है, ठीक एक पंक्ति में लोगों को व्यवस्थित करने जैसी; n में से r लोग चुनकर उन्हें वृत्ताकार मेज़ पर बिठाने के लिए, पहले समूह को ${}^nC_r$ से चुनें, फिर उसे वृत्ताकार रूप से (r−1)! से व्यवस्थित करें: कुल = ${}^nC_r \times (r−1)!$।
उम्र पर आधारित प्रश्न: एक चर, आगे ले जाना	x को एक आयु दें, बाकी सबको x के रूप में व्यक्त करें। 'बाद/पहले N वर्ष' हर आयु में N जोड़ता/घटाता है। दिया गया अनुपात एक गुणक (3x, 5x) बनता है, दो अलग अज्ञात नहीं। दो व्यक्तियों की आयु का अंतर समय के साथ स्थिर रहता है - एक शक्तिशाली शॉर्टकट। तीन-व्यक्ति श्रृंखला: सबसे कम गुणक वाले व्यक्ति को x दें। एक ही जोड़े पर दो समय शर्तें (भूत और भविष्य) युगपत समीकरण मांगती हैं।

उम्र पर आधारित प्रश्न हल सहित	एक अज्ञात उम्र को एक चर मान लें (आमतौर पर जो सबसे सरल अनुपात या संबंध में दिखाई देता है), फिर प्रश्न में हर दूसरी उम्र को उसी चर के रूप में व्यक्त करें।; "A, B से दोगुना बड़ा है" का मतलब है A = 2B — वाक्यों को उसी कर्ता-पहले क्रम में अनुवाद करें जिसमें वे लिखे गए हैं, उल्टा नहीं।; "N वर्ष बाद" या "N वर्ष पहले" वाली शर्तों के लिए, प्रश्न में हर व्यक्ति की उम्र में N जोड़ें या घटाएं, उस व्यक्ति सहित जो पहले से x के रूप में परिभाषित है — किसी एक व्यक्ति की उम्र समायोजित करना भूल जाना यहां सबसे आम गलती है।; जब सीधे एक अनुपात दिया गया हो (जैसे, "उम्रें 3 : 5 के अनुपात में हैं"), तो दो अलग-अलग अज्ञातों के बजाय एक ही गुणक का उपयोग करें — 3x और 5x। यह समस्या को एक चर में बदल देता है, जो प्रश्न के बाकी हिस्से से केवल एक और समीकरण के साथ हल करने योग्य हो जाता है।; उपयोगी जाँच: किसी भी दो व्यक्तियों की उम्र का अंतर समय के साथ कभी नहीं बदलता। यदि आप इसे वर्तमान उम्रों से एक बार निकाल लें, तो यह प्रश्न में बताए गए हर अन्य समय पर भी वही रहना चाहिए — यह गणना की गलती पकड़ने का एक तेज़ तरीका है।; जब प्रश्न दो अलग-अलग समयों पर दो शर्तें दे और असल में दो अज्ञात हों (शुरुआत में सीधा अनुपात न हो), तो दोनों को एक जैसे दो चरों में दो समीकरण बनाएं और प्रतिस्थापन या व्युत्क्रमण (elimination) से साथ हल करें।; हल करने के बाद, प्रश्न की हर शर्त से दोबारा जांचें, न कि केवल उस आखिरी शर्त से जिससे आपने x निकाला — जो मान एक शर्त पूरी करे पर दूसरी नहीं, वह बताता है कि पहले कोई चरण गलत हुआ।
लाभ, हानि और छूट — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	लाभ/हानि% लागत मूल्य उपयोग करता है; छूट% अंकित मूल्य उपयोग करता है; विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य × बरकरार छूट गुणक (क्रमागत छूट गुणा होती हैं, जुड़ती नहीं)। सभी बताई गई लागतें शामिल करें। झूठे-वज़न विक्रेता: लाभ% = (दावा किया गया−वास्तविक)/वास्तविक × 100। छूट वाले विक्रय मूल्य से अंकित मूल्य वापस पाना: बरकरार अंश से भाग दें, छूट% कभी वापस न जोड़ें।
लाभ और हानि के प्रश्न हल सहित	लाभ = विक्रय मूल्य (SP) − क्रय मूल्य (CP), जब SP > CP हो। हानि = CP − SP, जब CP > SP हो।; लाभ% या हानि% हमेशा क्रय मूल्य (CP) पर निकाला जाता है, जब तक प्रश्न में स्पष्ट रूप से कुछ और न कहा गया हो: (लाभ या हानि / CP) × 100। व्यावसायिक "मार्जिन" SP के आधार पर निकाला जाता है — समान रुपये के लाभ के लिए ये दोनों प्रतिशत अलग होते हैं, इसलिए हमेशा जांचें कि प्रश्न किस आधार की बात कर रहा है।; छूट हमेशा अंकित मूल्य (MP) पर निकाली जाती है, क्रय मूल्य पर नहीं: SP = MP × (1 − छूट%/100)। इसे CP से गड्डमड्ड करना सबसे आम गलती है।; जब किसी वस्तु को a% बढ़ाकर अंकित किया जाता है और फिर b% की छूट दी जाती है, तो शुद्ध लाभ पर प्रभाव वही क्रमिक-परिवर्तन सूत्र होता है जो प्रतिशत में है: शुद्ध% = a + b + (ab/100)। इसका अर्थ यह भी है कि समान आकार का मार्कअप और छूट कभी रद्द नहीं होते — परिणाम हमेशा शुद्ध हानि होता है (नीचे उदाहरण देखें)।; झूठे बाट/माप वाले प्रश्न ("कीमत पर बेचने का दावा करता है लेकिन कम वज़न देता है") असल में छिपे हुए लाभ के प्रश्न हैं: व्यापारी का लाभ% = (अंतर / वास्तव में दी गई मात्रा) × 100, जहां अंतर = दावा की गई मात्रा − वास्तविक मात्रा।; एक उपयोगी पहचान: यदि दो वस्तुएं समान विक्रय मूल्य पर बेची जाती हैं, एक पर x% लाभ और दूसरे पर x% हानि, तो कुल परिणाम हमेशा (x/10)% का वर्ग, यानी (x^2/100)%, की हानि होता है — बराबरी कभी नहीं होती, भले ही +x% और −x% रद्द होते दिखें।; क्रमिक छूट (जैसे "20% छूट, फिर अतिरिक्त 10% छूट") भी क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन की तरह जुड़ती है, छूट प्रतिशतों को सीधे जोड़कर नहीं — अधिक जानकारी के लिए अलग "क्रमिक छूट" पाठ देखें।; जाँच: छूट के बाद SP, MP से कम होना चाहिए; लाभ के बाद SP, CP से अधिक होना चाहिए; एक ही CP पर लाभ% और हानि% को अलग-अलग CP वालों के साथ बिना रुपये में बदले तुलना न करें।
क्रमिक छूट (Successive Discount) के प्रश्न हल सहित	हर छूट को एक-एक करके, क्रम में, जो भी कीमत पिछली छूट के बाद बची हो उस पर लागू करें — कभी भी प्रतिशतों को जोड़कर एक साथ लागू न करें।; दो क्रमिक छूट d1% और d2% के बराबर एकल छूट होती है d1 + d2 − (d1 × d2)/100 — यह हमेशा साधारण योग d1 + d2 से थोड़ी कम होती है, क्योंकि दूसरी छूट पहले से घटी हुई कीमत पर लगती है।; क्रमिक छूट लगभग हमेशा खरीदार को उनके योग के बराबर एकल छूट से ज़्यादा भुगतान करवाती है — "25% और 10% की छूट" "35% की सीधी छूट" से छोटी बचत है, भले ही 25 + 10 = 35 हो।; दो क्रमिक 50% छूट किसी वस्तु को मुफ्त नहीं बनातीं — दूसरी 50% पहले से आधी हो चुकी कीमत पर है, तो संयुक्त प्रभावी छूट 75% होती है, 100% नहीं।; तीन क्रमिक छूटों के लिए, उन्हें दो-दो करके वही सूत्र दोहराकर मिलाएं: पहले d1 और d2 को एक समतुल्य छूट में मिलाएं, फिर उस परिणाम को d3 के साथ मिलाएं — यह एक साथ तीन प्रतिशतों को दिमाग में रखने से आसान है।; उलटे प्रश्न (अंतिम कीमत, या समग्र समतुल्य छूट देकर, एक व्यक्तिगत छूट निकालना) गुणन को उल्टा चलाते हैं: अज्ञात छूट को अलग करने के लिए समग्र गुणक को ज्ञात छूट के गुणक से भाग दें।
BODMAS, भिन्न, दशमलव, मूल और घातांक	कोष्ठक → घात/मूल → × और ÷ बायें से दायें → + और − बायें से दायें; भिन्न भाग में व्युत्क्रम का उपयोग होता है; आवर्ती पूँछें घटाव से निरस्त होती हैं; ad और bc की तुलना करें; मुख्य √ अऋणात्मक है; गुणनफल/भागफल/घात-की-घात के लिए घातांक जोड़ें/घटाएँ/गुणा करें।

सरलीकरण (BODMAS) के प्रश्न हल सहित	BODMAS क्रियाओं का क्रम देता है: कोष्ठक (Brackets), का (Of), भाग (Division), गुणा (Multiplication), जोड़ (Addition), घटाव (Subtraction) — पहले सबसे भीतरी कोष्ठक हल करें, पूरे व्यंजक को बाएं से दाएं नहीं।; "का" (of) का मतलब है गुणा, लेकिन इन परीक्षाओं की मानक शिक्षण परंपरा के अनुसार, व्यंजक के हर "का" को किसी भी अलग भाग या गुणा से पहले हल किया जाता है — यही वह चरण है जो लोगों को तब उलझाता है जब वे सीधे बाएं-से-दाएं हल करने लगते हैं।; भाग और गुणा एक-दूसरे के बराबर दर्जे के हैं और जिस क्रम में आते हैं उसी क्रम में बाएं से दाएं हल किए जाते हैं — यह नहीं कि "हमेशा गुणा से पहले भाग करें"। जोड़ और घटाव के लिए भी यही सच है।; कोष्ठकों को सबसे भीतरी से बाहर की ओर हल करें: पहले ( ), फिर {}, फिर [], हर परिणाम को अगली बाहरी परत में डालते हुए।; वल्कुलम (किसी भाग के ऊपर खींची गई रेखा) की प्राथमिकता सबसे अधिक होती है — कोष्ठकों से भी अधिक। बार के नीचे के भाग को पहले, अपने स्वतंत्र BODMAS गणना के रूप में, हल करें, बाकी व्यंजक को छूने से पहले।; जब किसी व्यंजक में भिन्न और दशमलव दोनों मिले हों, तो गणना से पहले सब कुछ एक ही रूप (आमतौर पर भिन्न, क्योंकि वे बिल्कुल सही जुड़ते हैं) में बदलें — 0.6 और 3/5 को बिना बदले मिलाना गणना में गलती का आम कारण है।; जाँच के लिए, सबसे भीतरी हिस्से को अलग से फिर से हल करें और देखें कि वह उसी से मेल खाता है जो आपने वापस डाला था — यह "गलत क्रम" की अधिकतर गलतियों को बाकी व्यंजक में फैलने से पहले ही पकड़ लेता है।
सन्निकटन (Approximation) के प्रश्न हल सहित	अभिव्यक्ति (expression) की हर संख्या को पहले एक सुविधाजनक नज़दीकी मान तक गोल करें — दशमलव के लिए निकटतम पूर्णांक, प्रतिशत और बड़ी संख्याओं के लिए 10/100 का निकटतम गुणज, वर्गमूल के नीचे निकटतम पूर्ण वर्ग।; फिर गोल की गई संख्याओं के साथ सामान्य रूप से BODMAS का उपयोग करके गणना करें — लक्ष्य सटीक उत्तर के करीब एक मान है, सटीक उत्तर खुद नहीं।; लगातार (consistently) गोल करें: यदि आप एक संख्या को ऊपर गोल करते हैं, तो कुल त्रुटि आमतौर पर छोटी रहती है जब तक आप कई संख्याओं को एक ही दिशा में बड़े अंतर से गोल न करें।; यह बहुविकल्पीय प्रश्नों के लिए एक शुद्ध गति तकनीक है, जहां विकल्प इतने अलग-अलग फैले होते हैं कि एक अनुमानित मान स्पष्ट रूप से सही उत्तर पहचान देता है।; वर्ग, घन और मूल के लिए, उस निकटतम संख्या पर गोल करें जिसका वर्ग, घन या मूल हाथ से निकालना आसान हो — जैसे $28.9^2 \approx 29^2 = 841$, या 215.5 का घनमूल ≈ 216 (एक पूर्ण घन) का घनमूल = 6।; कई गोल की गई संख्याओं के गुणा या भाग में, एक ही दिशा में एक से अधिक संख्या को गोल करना त्रुटि को बढ़ा देता है (दोनों त्रुटियां आपस में गुणा होती हैं); कुछ को ऊपर और कुछ को नीचे गोल करना त्रुटि को आंशिक रूप से रद्द कर देता है।; कई पदों के योग या अंतर में, गोल करने की त्रुटियां सीधे जुड़ जाती हैं (या आंशिक रूप से रद्द होती हैं यदि कुछ पद ऊपर और कुछ नीचे गोल हों) — यह आमतौर पर गुणा से कम जोखिम वाला होता है, जहां त्रुटियां जुड़ने के बजाय गुणा होकर मिलती हैं।
स्टॉक्स और शेयर्स (Stocks and Shares) के प्रश्न हल सहित	अंकित मूल्य (FV) शेयर का छपा हुआ/नाममात्र मूल्य है (आमतौर पर ₹100 जब तक अन्यथा न कहा जाए) — लाभांश की गणना हमेशा FV के प्रतिशत के रूप में की जाती है, बाज़ार मूल्य के नहीं; बाज़ार मूल्य (MV) शेयर खरीदने के लिए वास्तव में चुकाई गई कीमत है। एक शेयर "₹X के प्रीमियम पर" का मतलब है MV = FV + X; "₹X की छूट पर" का मतलब है MV = FV − X; खरीदे गए शेयरों की संख्या = निवेश ÷ MV। वार्षिक आय = शेयरों की संख्या × प्रति शेयर लाभांश, जहां प्रति शेयर लाभांश = (लाभांश % × FV) / 100; प्रतिफल दर (yield) वास्तव में चुकाई गई राशि के प्रतिशत के रूप में लाभांश है: Yield% = (प्रति शेयर लाभांश / MV) × 100 — यही आपको अलग-अलग कीमतों पर खरीदे गए शेयरों में प्रतिफल की तुलना करने देता है; स्टॉक को अक्सर परीक्षा में अलग ढंग से लिखा जाता है: "r% RsN स्टॉक M पर" का मतलब है कुल अंकित मूल्य RsN की होल्डिंग, जो उस अंकित मूल्य पर r% लाभांश देती है, और वर्तमान में M बाज़ार मूल्य (प्रति Rs100 अंकित मूल्य) पर बिक रही है। इस होल्डिंग को खरीदने की लागत = N × M/100। वार्षिक आय = अंकित मूल्य N का r% — चुकाई गई लागत का नहीं; दो स्टॉक्स में से बेहतर निवेश तय करने के लिए, उनके प्रतिफल (yield) की तुलना करें (वास्तव में निवेशित हर रुपये पर मिलने वाला रिटर्न): Yield% = (लाभांश% × FV) / MV। अधिक प्रतिफल वाला बेहतर है, भले ही उसका घोषित लाभांश प्रतिशत कागज़ पर छोटा दिखे।
त्रिकोणमिति — अवधारणाएँ और अनुप्रयोग	$\sin\theta$=लंब/कर्ण, $\cos\theta$=आधार/कर्ण, $\tan\theta$=लंब/आधार; cosec, sec, cot इनके व्युत्क्रम हैं। $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$; $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$; $\text{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$। पूरक कोण sin↔cos, tan↔cot, sec↔cosec बदलते हैं। समकोण त्रिभुज की कोई भी दो ज्ञात भुजाएं बिना कोण जाने सभी छह अनुपात देती हैं। मानक मान 0°,30°,45°,60°,90° पर: sin = 0, 1/2, $1/\sqrt{2}$, $\sqrt{3}/2$, 1 (cos उल्टे क्रम में)।
त्रिकोणमितीय अनुपात और सर्वसमिकाएं के प्रश्न हल सहित	मूल सर्वसमिका: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, किसी भी कोण θ के लिए। sin θ या cos θ में से एक दिए जाने पर, यह सीधे दूसरा देता है।; दो व्युत्पन्न सर्वसमिकाएं, दोनों मूल सर्वसमिका से बनी: $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, और $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$।; मानक कोण मान जो याद रखने लायक हैं: sin 30° = cos 60° = 1/2; sin 60° = cos 30° = $\sqrt{3}/2$; sin 45° = cos 45° = $1/\sqrt{2}$; tan 45° = 1; tan 30° = $1/\sqrt{3}$; tan 60° = $\sqrt{3}$।; एक न्यून कोण के लिए, सभी अनुपात धनात्मक होते हैं, तो एक सर्वसमिका में वर्गमूल लेने पर केवल कभी भी धनात्मक मूल की ज़रूरत होती है — यह व्यवहार में $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ के साथ काम करना सरल बनाता है।; व्युत्क्रम संबंध: cosec θ = 1/sin θ, sec θ = 1/cos θ, cot θ = 1/tan θ — हर बार त्रिभुज से दोबारा निकालने के बजाय इनसे किसी अनुपात और उसके व्युत्क्रम के बीच बदलें।; पूरक-कोण संबंध: sin(90° − θ) = cos θ, cos(90° − θ) = sin θ, और tan(90° − θ) = cot θ — किसी कोण और उसके पूरक को मिलाने वाले अभिव्यक्तियों को सरल करने में उपयोगी।; याद रखने लायक किनारे के मान: sin 0° = 0, cos 0° = 1, sin 90° = 1, cos 90° = 0। tan 90° और cot 0° अपरिभाषित हैं (शून्य से भाग होता है), इसीलिए कुछ सर्वसमिकाएं केवल 0° और 90° के बीच के कोणों के लिए ही सही रहती हैं।

Pariksha Saathi एक स्वतंत्र परियोजना है और किसी भर्ती संस्था या सरकारी विभाग से संबद्ध नहीं है। हर विषय के नोट्स: parikshasaathi.com/downloads/